Programmmierkurs Prolog

Sommersemester 2002

Ralf Klinkenberg

Universität Dortmund

1.1 Vorlesung und Übungen

Programmierkurs Prolog im Sommersemester 2002

Termin: Mo., 22.07., – Fr., 02.08.2002,
täglich von Mo.–Fr.

Uhrzeit: 9:00–12:00 (Vorlesung) und
13:00–14:30 oder 14:30–16:00 (Übung)

Ort: GB IV / Raum 113,
Ausnahme: 29.+30.06.2002: GB V / Raum 420

Pool: GB V / Raum U 010

WWW: `http://www-ai.cs.uni-dortmund.de/LEHRE/PROLOG/`

Veranstalter:

Ralf Klinkenberg, Uni Dortmund, LS Informatik VIII

Tel.: 0231/755–5103

EMail: klinkenberg@ls8.cs.uni-dortmund.edu

pkpro000

1.2 Themen

Themen des Programmierkurses Prolog (1):

- Theoretische Grundlagen: **Prädikatenlogik**
- **Programmierung in Prolog**: Einführung, Erste Schritte, Syntax, Ausführungsmodell
- Arithmetik, Rekursion, Strukturen, Bäume, Listen, Backtracking, der Cut
- Ein- & Ausgabe, Systemprädikate, Modulsystem, Datenstrukturen und Algorithmen, Debugger & Compiler (1), Entwurf von Prolog-Programmen
- Problemlösen als Suche (Suchprobleme), Spielprobleme

Themen des Programmierkurses Prolog (2):

- Meta-Prädikate, Meta-Programmierung, Meta-Interpreter
- Expertensysteme, Debugger & Compiler (2)
- Definite Clause Grammars (DCGs)
- Constraint Logic Programming (CLP)

1.3 Literatur

Bratko, Ivan (2001). *Prolog Programming for Artificial Intelligence*. Addison-Wesley Longman, Amsterdam, 3. Auflage, ISBN 0-201-40375-7.

Clocksin, W.F. und Mellish, C.S. (1994). *Programming in Prolog*. Springer-Verlag, 4. Auflage.

O'Keefe, R. (1990). *The Craft of Prolog*. MIT press, Cambridge, MA, USA und London, GB.

Sterling, L. und Shapiro, E. (1994). *The Art of Prolog*. MIT Press, 2. Auflage.

1.4 Weitere Quellen

Brockhausen, Peter (2000). *Programmierkurs Prolog*. Uni Dortmund.

Joachims, Thorsten und Lehmke, Stephan (1998). *Programmierkurs Prolog*. Uni Dortmund.

Joachims, Thorsten und Markof, Ingolf (1997). *Programmierkurs Prolog*. Uni Dortmund.

Lehmke, Stephan (2002). *Vorlesung Intelligente Systeme*. FH Gelsenkirchen.

Gliederung

Zum Nachlesen und Vertiefen:

U. Schöning

Logik für Informatiker

B·I Wissenschaftsverlag

2.1.1 Elemente der mathematischen Logik

Syntax: Sprache logischer Ausdrücke.

Semantik: Interpretation logischer Ausdrücke — wann ist ein Ausdruck **gültig**, wann **ungültig**?

Modellbegriff: Was macht einen Ausdruck gültig?

Semantische Folgerung:
Was **folgt** aus einer Menge von Annahmen?

Formales Ableiten: Wie kann man die semantische Folgerung durch **regelbasiertes Schließen** charakterisieren?

PS Menge von Paaren **Prädikatensymbol/Arität** (Stellenz.).

Beispiel 2.2.1 Prädikatensymbol `member` mit Arität 2:
$\boxed{\texttt{member}/2 \in \textbf{PS}}$.

FS Menge von Paaren **Funktionssymbol/Arität**.

Beispiel 2.2.2 Funktionssymbol `div` mit Arität 2:
$\boxed{\texttt{div}/2 \in \textbf{FS}}$.

Spezialfall Arität $= 0$: **Individuenkonstante** (Z. B. `pi`).

Definition 2.2.1 (Individuenvariablen und Terme)

1. *Wir fixieren eine Menge* **VAR** *von* **Individuenvariablen***.*
2. *Individuenvariablen und Individuenkonstanten sind* **Terme***.*
3. *Gilt* $f/n \in$ **FS** *mit* $n \geq 1$ *und sind* $T_1, \ldots, T_n$ *Terme, dann ist* $\boxed{f(T_1, \ldots, T_n)}$ *ein* **Term***.*

Definition 2.2.2 (Ausdrücke)

1. *Wenn* $\mathbf{p}/0 \in$ **PS**, *so ist* $\boxed{\mathbf{p}}$ *ein Ausdruck.*
2. *Gilt* $\mathbf{p}/\mathbf{n} \in$ **PS** *mit* $\mathbf{n} \geq 1$ *und sind* $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_\mathbf{n}$ *Terme, dann ist* $\boxed{\mathbf{p}(\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_\mathbf{n})}$ *ein* **Ausdruck**.
3. *Sind* $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{B}$ *Ausdrücke, so auch* $\boxed{\neg\mathbf{A}}$, $\boxed{(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})}$.
4. *Ist* $\mathbf{V} \in$ **VAR** *und ist* $\mathbf{A}$ *ein Ausdruck, so auch* $\boxed{\forall \mathbf{V}\, \mathbf{A}}$.

Die Menge aller Ausdrücke: **AUSD**.

Ausdrücke nach 1 und 2 heißen **atomar**.

Zusätzliche Operatoren:

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) =_{\mathsf{def}} (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) =_{\mathsf{def}} \neg (\neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) =_{\mathsf{def}} ((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}))$$

$$\exists \mathbf{V}\, \mathbf{A} =_{\mathsf{def}} \neg \forall \mathbf{V} \neg \mathbf{A}$$

Klammersparung:

$\leftrightarrow$ trennt stärker als $\rightarrow$, $\vee$ und $\wedge$

$\rightarrow$ trennt stärker als $\vee$ und $\wedge$

$\vee$ trennt stärker als $\wedge$

Beispiel 2.2.3

$$\mathbf{PS} = \{\mathtt{p/2}\}, \quad \mathbf{FS} = \emptyset$$

(2.1) $\mathtt{p}$ reflexiv

$$\forall \mathtt{X}\, \mathtt{p(X,X)}$$

(2.2) $\mathtt{p}$ symmetrisch

$$\forall \mathtt{X}\, \forall \mathtt{Y}\, (\, \mathtt{p(X,Y)} \rightarrow \mathtt{p(Y,X)}\,)$$

(2.3) $\mathtt{p}$ transitiv

$$\forall \mathtt{X}\, \forall \mathtt{Y}\, \forall \mathtt{Z}\, (\, \mathtt{p(X,Y)} \wedge \mathtt{p(Y,Z)} \rightarrow \mathtt{p(X,Z)}\,)$$

(2.3) ohne Abkürzungen:

$$\forall \mathtt{X}\, \forall \mathtt{Y}\, \forall \mathtt{Z}\, (\, \neg\neg\, (\, \neg \mathtt{p(X,Y)} \vee \neg \mathtt{p(Y,Z)}\,) \vee \mathtt{p(X,Z)}\,)$$

Definition 2.3.1 (Interpretation)

Ein Quintupel $\boxed{\mathfrak{I} = [\mathbf{PS}, \mathbf{FS}, \mathfrak{U}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Pi}]}$ *heiße* **Interpretation**

$=_{\text{def}}$ *1.* $\mathfrak{U}$ *ist eine nicht-leere Menge* *(***Individuenbereich***,* **Universum***).*

2. $\mathbf{\Phi}$ *ordnet jedem Paar* $\mathfrak{f}/\mathfrak{n} \in$ **FS** *eine* **Abbildung** $\boxed{\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{f}/\mathfrak{n}} : \mathfrak{U}^{\mathfrak{n}} \to \mathfrak{U}}$ *zu; ist* $\mathfrak{n} = 0$*, so gilt:* $\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{f}/\mathfrak{n}} \in \mathfrak{U}$.

3. $\mathbf{\Pi}$ *ordnet jedem Paar* $\mathfrak{p}/\mathfrak{n} \in$ **PS** *eine* **Teilmenge** $\boxed{\mathbf{\Pi}_{\mathfrak{p}/\mathfrak{n}} \subseteq \mathfrak{U}^{\mathfrak{n}}}$ *zu; ist* $\mathfrak{n} = 0$*, so gilt* $\mathbf{\Pi}_{\mathfrak{p}/\mathfrak{n}} \subseteq \{\varnothing\}$.

Definition 2.3.2 (Interpretation der Terme)

σ *heiße* **$\mathfrak{I}$-Zustand**

$=_{\text{def}}$ σ : VAR $\longrightarrow$ $\mathfrak{U}$

EL (T, $\mathfrak{I}$, σ) *ordnet dem Term* T *das durch* $\mathfrak{I}$ *im* $\mathfrak{I}$*-Zustand* σ *festgelegte* **Individuum** *zu.*

EL (V, $\mathfrak{I}$, σ) $=_{\text{def}}$ $\boxed{\sigma (V)}$, *falls* V $\in$ VAR

EL (f, $\mathfrak{I}$, σ) $=_{\text{def}}$ $\boxed{\Phi_f}$, *falls* f/0 $\in$ FS

EL (f (T$_1$, . . . , T$_n$), $\mathfrak{I}$, σ)

$=_{\text{def}}$ $\boxed{\Phi_{f/n} (\text{EL} (T_1 , \mathfrak{I} , \sigma) , \ldots , \text{EL} (T_n , \mathfrak{I} , \sigma))}$,

falls f/n $\in$ FS *und* n $\geq$ 1 *.*

$$\sigma \langle V := \xi \rangle (W) =_{\text{def}} \begin{cases} \sigma(W), & \text{falls } W \neq V \\ \xi, & \text{falls } W = V \end{cases}$$

Definition 2.3.3 (Erfüllungsdefinition)

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \mathbf{p} =_{\text{def}} \boxed{\Pi_{\mathbf{p}} = \{\varnothing\}}$$

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \mathbf{q}(\mathsf{T}_1, \ldots, \mathsf{T}_n)$$

$$=_{\text{def}} \boxed{[\mathsf{EL}(\mathsf{T}_1, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, \mathsf{EL}(\mathsf{T}_n, \mathfrak{I}, \sigma)] \in \Pi_{\mathbf{q}}}$$

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \neg \mathbf{A} =_{\text{def}} \textit{Es gilt nicht } \boxed{\sigma, \mathfrak{I} \models \mathbf{A}}$$

$$\sigma, \mathfrak{I} \models (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$$

$$=_{\text{def}} \boxed{\sigma, \mathfrak{I} \models \mathbf{A} \textit{ oder } \sigma, \mathfrak{I} \models \mathbf{B}}$$

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \forall \mathbf{V} \mathbf{A}$$

$$=_{\text{def}} \textit{Für jedes } \xi \in \mathbf{U} \textit{ gilt: } \boxed{\sigma \langle \mathbf{V} := \xi \rangle, \mathfrak{I} \models \mathbf{A}}$$

Definition 2.3.4 (Allgemeingültig)

1. *In* $\mathfrak{J}$ *ist* $\mathbf{A}$ **allgemeingültig** $(\mathfrak{J} \models \mathbf{A})$
   $=_{\text{def}}$ *Für jeden* $\mathfrak{J}$*-Zustand* $\boldsymbol{\sigma}$ *gilt:* $\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{J} \models \mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A}$ *ist* **(schlechthin) allgemeingültig** $(\models \mathbf{A})$
   $=_{\text{def}}$ *Für jede Interpretation* $\mathfrak{J}$ *gilt:* $\mathfrak{J} \models \mathbf{A}$.

Beispiel 2.3.1

$$\mathbf{A} =_{\text{def}} \forall \mathtt{X}\, \mathtt{p}(\mathtt{X},\mathtt{X})$$

$$\mathbf{B} =_{\text{def}} \forall \mathtt{X}\, \forall \mathtt{Y}\, (\mathtt{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}) \rightarrow \mathtt{p}(\mathtt{Y},\mathtt{X}))$$

$$\mathbf{C} =_{\text{def}} \forall \mathtt{X}\, \forall \mathtt{Y}\, \forall \mathtt{Z}\, (\mathtt{p}(\mathtt{X},\mathtt{Y}) \wedge \mathtt{p}(\mathtt{Y},\mathtt{Z}) \rightarrow \mathtt{p}(\mathtt{X},\mathtt{Z}))$$

Dann gilt für $\mathfrak{I} = [\mathbf{PS}, \mathbf{FS}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Pi}]$ mit

$\boxed{\mathbf{\Pi}_{\mathtt{p}} = \{(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) \mid \mathfrak{n}, \mathfrak{m} \text{ haben die gleichen Teiler}\}}$, daß

$\mathfrak{I} \models \mathbf{A}$ und $\mathfrak{I} \models \mathbf{B}$ und $\mathfrak{I} \models \mathbf{C}$ (Äquivalenzrelation).

Wählen wir $\mathbf{\Pi}_{\mathtt{p}} = \{(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) \mid \mathfrak{n}, \mathfrak{m} \in \mathbb{N} \text{ und } \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}\}$,
so gilt $\mathfrak{I} \models \mathbf{A}$ und $\mathfrak{I} \models \mathbf{C}$, aber *nicht* $\mathfrak{I} \models \mathbf{B}$.

Beispiel 2.3.2 Für jeden Ausdruck $\boldsymbol{A}$ gilt

$$\models \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}.$$

Definition 2.3.5 (Semantische Äquivalenz)

$\mathbf{A}_1$ *ist mit* $\mathbf{A}_2$ **semantisch äquivalent** *(*$\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{A}_2$*)*
$=_{\text{def}}$ $(\mathbf{A}_1 \leftrightarrow \mathbf{A}_2)$ *ist allgemeingültig, d. h.*
$\models (\mathbf{A}_1 \leftrightarrow \mathbf{A}_2)$.

Theorem 2.3.1 (Semantische Ersetzbarkeit)

Sind $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ *beliebige Ausdrücke und geht* $\mathbf{A}_4$ *aus* $\mathbf{A}_1$ *durch Ersetzung von* $\mathbf{A}_2$ *durch* $\mathbf{A}_3$ *hervor, gilt schließlich*

$$\mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{A}_3,$$

so gilt auch $\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{A}_4$.

Beispiel 2.3.3 Es gilt für Ausdrücke $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$

$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \equiv \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$	**Kommutativität**
$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \equiv \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$	**Assoziativität**
$\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}$	**Absorption**
$\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$	**Distributivit.**
$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$	**De Morgansche Regel**
$\neg\neg\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$	**Doppelte Negation**
$\neg\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B} \equiv \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	**Kontraposition**
$\neg\forall x\mathbf{A} \equiv \exists x\neg\mathbf{A}$	

Kommt x nicht frei in $\mathbf{B}$ vor, so $\forall x\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \equiv \forall x(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$

Definition 2.3.6 (Normalformen)

$\mathbf{A}$ *heiße* **pränexe Normalform**

$=_{\text{def}}$ $\mathbf{A}$ *ist* **quantorenfrei** oder *es gibt* $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n \in$ **VAR**, *Quantoren* $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_n \in \{\forall, \exists\}$ *und ein quantorenfreies* $\mathbf{B}$, *so daß* $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{V}_1 \ldots \mathbf{Q}_n\mathbf{V}_n\mathbf{B}}$.
$\mathbf{Q}_1\mathbf{V}_1 \ldots \mathbf{Q}_n\mathbf{V}_n$ *heißt* **Präfix** *von* $\mathbf{A}$.

$\mathbf{A}$ *heiße* **universale Normalform**

$=_{\text{def}}$ $\mathbf{A}$ *ist* **pränexe Normalform**; *ist das Präfix von* $\mathbf{A}$ *nicht leer, so kommen darin nur* **Allquantoren** *vor.*

Theorem 2.3.2
Zu jedem Ausdruck $\mathbf{A} \in \mathbf{AUSD}$ *kann eine pränexe Normalform* $\mathbf{N}$ *konstruiert werden, so daß*

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{N}.$$

Beweis

Anwenden des semantischen Ersetzbarkeitstheorems. $\square$

Sei $\mathbf{X}$ eine Menge von Ausdrücken.

Definition 2.4.1 (Modell)

$\mathfrak{I}$ *heiße* **Modell** *von* $\mathbf{X}$ *(*$\mathfrak{I} \models \mathbf{X}$*)*

$=_{\text{def}}$ *Für jedes* $\mathbf{A} \in \mathbf{X}$ *ist* $\mathbf{A}$ *in* $\mathfrak{I}$ *allgemeingültig,*

d. h. es gilt $\boxed{\mathfrak{I} \models \mathbf{A}}$.

Menge aller Modelle von $\mathbf{X}$*:* $\boxed{\mathbf{MOD}(\mathbf{X})}$.

Theorem 2.4.1 (Endlichkeitssatz für Modelle)
Gibt es zu jeder **endlichen** *Teilmenge* $\mathbf{X}_{\mathsf{fin}} \subseteq \mathbf{Y}$ *ein Modell* $\mathfrak{I}$, *d. h. mit* $\mathfrak{I} \models \mathbf{X}_{\mathsf{fin}}$, *dann gibt es auch für die gesamte Menge* $\mathbf{Y}$ *ein Modell, etwa* $\mathfrak{I}'$, *d. h. mit* $\mathfrak{I}' \models \mathbf{Y}$.

Definition 2.4.2 (Semantische Folgerung)

Aus $\mathbf{X}$ **folgt (semantisch)** $\boldsymbol{A}$ *(*$\mathbf{X} \Vdash \boldsymbol{A}$*)*

$=_{\text{def}}$ *Für jede Interpretation* $\mathfrak{J}$ *gilt:*

Wenn $\mathfrak{J}$ *Modell von* $\mathbf{X}$*, so* $\mathfrak{J}$ *Modell von* $\boldsymbol{A}$*.*

$$\mathbf{CONS}(\mathbf{X}) =_{\text{def}} \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \in \mathbf{AUSD} \text{ und } \mathbf{X} \Vdash \boldsymbol{A}\}.$$

Beispiel 2.4.1

$$\textbf{PS} = \{=/2\}, \qquad \textbf{FS} = \{+/2, 0/0\}$$

$$\mathbf{A} =_{\text{def}} \forall X \forall Y \forall Z \;\; (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

(+ ist assoziativ)

$$\mathbf{B} =_{\text{def}} \forall X \;\; X + 0 = X \qquad \text{(Neutrales Element)}$$

$$\mathbf{C} =_{\text{def}} \forall X \exists Y \;\; X + Y = 0 \qquad \text{(Inverses)}$$

$$\mathbf{D} =_{\text{def}} \forall X \forall Y \;\; X + Y = Y + X \qquad \text{(+ ist kommutativ)}$$

$$\mathbf{G} =_{\text{def}} \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$$

$\mathsf{T} \in \textbf{Cons}(\mathbf{G}) \Leftrightarrow \mathsf{T}$ ist ein Satz der Gruppentheorie.

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \mathsf{T}_1 = \mathsf{T}_2 =_{\mathrm{def}} \mathbf{EL}(\mathsf{T}_1, \mathfrak{I}, \sigma) = \mathbf{EL}(\mathsf{T}_2, \mathfrak{I}, \sigma)$$

Definition 2.4.3 (Generalisierte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ *die Variablen, die in* A **frei** *vorkommen.*

$$\mathbf{Gen}(A) =_{\text{def}} \forall X_1 \ldots \forall X_n A.$$

Lemma 2.4.2
Sei $A \in \mathbf{AUSD}$.

$$\mathbf{Cons}(A) = \mathbf{Cons}(\mathbf{Gen}(A)).$$

2.5.1 Idee

Semantische Folgerung (zu aufwändig) soll durch **Syntaktisches Ableiten** (Berechnungen über der Sprache **AUSD**) ersetzt werden.

Logik: Eine Sprache **AUSD** zusammen mit einem (semantischen) **Folgerungsoperator** $\Vdash$.

Kalkül: Eine Sprache **AUSD** zusammen mit einem (syntaktischen) **Beweisbarkeitsoperator** $\vdash$.

Rechtfertigung eines Kalküls:

Korrektheit: $\mathbf{X} \vdash \boldsymbol{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X} \Vdash \boldsymbol{A}$

„Alles, was beweisbar ist, folgt auch semantisch“.

Vollständigkeit: $\mathbf{X} \Vdash \boldsymbol{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X} \vdash \boldsymbol{A}$

„Alles, was folgt, ist auch beweisbar“.

Um den Beweisoperator automatisieren zu können, wählen wir den **Resolutionskalkül**.

Da dieser auf einer sehr einfachen Schlußregel beruht, müssen wir die Ausdrücke stark vereinfachen.
$\leadsto$ **Klauselform**.

2.5.2 Vorbereitung

Definition 2.5.1 (Termeinsetzung)

$\mathbf{A}\left[{}^{\mathbf{V}}/_{\mathbf{T}}\right]$

$=_{\text{def}}$ *Derjenige Ausdruck, der aus* $\mathbf{A}$ *dadurch entsteht, dass die Individuenvariable* $\mathbf{V}$ *in* $\mathbf{A}$ *überall, wo sie* frei *vorkommt,* simultan *durch* $\mathbf{T}$ *ersetzt wird.*

Gebundene Umbenennung: Eine Variable wird überall im Wirkungsbereich eines Quantors, durch den sie *gebunden* wird, durch eine andere ersetzt.

Lemma 2.5.1 (Widerlegungssystem)

Für jedes $\mathbf{X} \subseteqq$ **AUSD** *und jedes* $\mathbf{A} \in$ **AUSD** *gilt:*

$\mathbf{X} \Vdash \mathbf{A}$ *genau dann,*

wenn $\boxed{\mathbf{X} \cup \{\neg\, \mathbf{Gen}(\mathbf{A})\}}$ *kein Modell hat.*

Definition 2.5.2

1. $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *heißen* **semantisch äquivalent** *(*$\mathbf{X} \equiv \mathbf{Y}$*)*
   $=_{\text{def}}$ *Für jede Interpretation* $\mathfrak{J}$ *und jeden* $\mathfrak{J}$*-Zustand* $\boldsymbol{\sigma}$ *gilt:*
   $$\boxed{\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{J} \models \mathbf{X} \text{ g.d.w. } \boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{J} \models \mathbf{Y}}.$$
2. $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *heißen* **Modell-äquivalent** *(*$\mathbf{X} \cong \mathbf{Y}$*)*
   $=_{\text{def}}$ $\boxed{\mathbf{MOD}(\mathbf{X}) = \mathbf{MOD}(\mathbf{Y})}$.
3. $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *heißen* **schwach Modell-äquivalent** *(*$\mathbf{X} \approxeq \mathbf{Y}$*)*
   $=_{\text{def}}$ $\boxed{\mathbf{MOD}(\mathbf{X}) \neq \emptyset \text{ gdw. } \mathbf{MOD}(\mathbf{Y}) \neq \emptyset}$.

Theorem 2.5.2
Zu jedem $\mathbf{X} \subseteq$ **AUSD** *kann ein* $\mathbf{Y} \subseteq$ **AUSD** *konstruiert werden, so dass*

1. $\mathbf{Y}$ *allein aus* **pränexen Normalformen** *besteht und*
2. $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ **semantisch äquivalent** *sind.*

2.5.3 Skolemisierung

$\mathcal{A}$ sei eine **Aussage** (Ausdruck ohne freie Variablen) der Form

$$\mathcal{A} = \forall X_1 \ldots \forall X_n \exists Y \; B.$$

Wir wählen ein *neues* Funktionssymbol f/n.
Dann ist $\mathcal{A}$ **schwach modell-äquivalent** zu

$$\forall X_1 \ldots \forall X_n B \left[{}^{Y}/_{f(X_1, \ldots, X_n)} \right].$$

Theorem 2.5.3 (Skolemisierungstheorem)
Zu jedem $\mathbf{X} \subseteq$ **AUSD** *kann ein* $\mathbf{X}' \subseteq$ **AUSD** *konstruiert werden, so dass*

1. $\mathbf{X}'$ *allein aus* **universalen Normalformen** *besteht und*
2. $\mathbf{X}'$ **schwach Modell-äquivalent** *mit* $\mathbf{X}$ *ist.*

Folgerung 2.5.4
Zu jedem $\mathrm{X} \subseteq$ **AUSD** *kann ein* $\mathrm{X}' \subseteq$ **AUSD** *konstruiert werden, so dass*

1. X' *allein aus* **quantorenfreien Ausdrücken** *besteht und*
2. X' **schwach Modell-äquivalent** *mit* X *ist.*

2.5.4 Konjunktive Normalform

Definition 2.5.3

1. $\mathbf{L}$ *heiße* **Literal**
   $=_{\text{def}}$ $\mathbf{L} \in$ **AUSD** *und* $\mathbf{L}$ *ist ein* **atomarer** *oder ein* **negierter atomarer** *Ausdruck.*
2. *Eine* **konjunktive Normalform** *ist eine* Konjunktion *aus* Alternativen, *die ihrerseits aus* Literalen *bestehen.*

Lemma 2.5.5
Zu jeder Menge $\mathbf{X} \subseteq$ **AUSD** *von* **quantorenfreien Ausdrücken** *kann* $\mathbf{X}' \subseteq$ **AUSD** *konstruiert werden, so dass*

1. *alle Ausdrücke* $\mathbf{A}' \in \mathbf{X}'$ **konjunktive Normalformen** *sind*
2. *und* $\mathbf{X}'$ **semantisch äquivalent** *mit* $\mathbf{X}$ *ist.*

Theorem 2.5.6

Zu jedem $\mathrm{X} \subseteq$ **AUSD** *kann ein* $\mathrm{X}' \subseteq$ **AUSD** *konstruiert werden, so dass*

1. *alle Ausdrücke aus* X' **Alternativen von Literalen** *sind und*
2. X' **schwach Modell-äquivalent** *mit* X *ist.*

Beispiel 2.5.1

$$
\begin{aligned}
\neg\,(\,\exists \mathtt{X}\,\mathtt{p(X,Y)} \;\vee\; \forall \mathtt{Z}\,\mathtt{q(Z)}\,) \\
&\equiv\; \forall \mathtt{X} \exists \mathtt{Z}\,\neg\,(\,\mathtt{p(X,Y)} \;\vee\; \mathtt{q(Z)}\,) \\
&\cong\; \forall \mathtt{Y} \forall \mathtt{X} \exists \mathtt{Z} \neg\,(\,\mathtt{p(X,Y)} \;\vee\; \mathtt{q(Z)}\,) \\
&\approxeq\; \forall \mathtt{Y} \forall \mathtt{X} \neg\,(\,\mathtt{p(X,Y)} \;\vee\; \mathtt{q(g(Y,X))}\,) \\
&\cong\; \neg\,(\,\mathtt{p(X,Y)} \;\vee\; \mathtt{q(g(Y,X))}\,) \\
&\equiv\; \neg\mathtt{p(X,Y)} \;\wedge\; \neg\mathtt{q(g(Y,X))} \\
&\equiv\; \{\neg\mathtt{p(X,Y)},\, \neg\mathtt{q(g(Y,X))}\}
\end{aligned}
$$

2.5.5 Klausellogik

Menge von Alternativen von Literalen

$\Longrightarrow$ Menge von Mengen von Literalen

$$\{\neg \texttt{p(X)} \vee \texttt{p(f(X, Y))}, \neg \texttt{q(Y)} \vee \texttt{p(f(X, Y))}\}$$

$$\Longrightarrow \{\{\neg \texttt{p(X)}, \texttt{p(f(X, Y))}\}, \{\neg \texttt{q(Y)}, \texttt{p(f(X, Y))}\}\}$$

- **Klausel**: Menge von Literalen
  (**Semantik** wie bei Alternative).
- Sei $\mathbf{X}$ eine Menge von Alternativen von Literalen.
  KLM $(\mathbf{X})$: Die $\mathbf{X}$ zugeordnete **Klauselmenge**.
- $\square =_{\text{def}} \varnothing$: Die **leere Klausel** (ist niemals erfüllt).

2.5.6 Grundresolution

Definition 2.5.4

T *ist ein* **Grundterm**

$=_{\text{def}}$ T *enthält keine Individuenvariablen.*

Menge aller Grundterme: **GTERM**.

Grundklausel: Klausel, deren Terme alle Grundterme sind.

Definition 2.5.5 (Herbrand-Menge)
Sei A *ein* quantorenfreier *Ausdruck, der genau die Variablen* $V_1, \ldots, V_n$ *enthält.*

$$H(A) =_{\mathrm{def}} \left\{ A \left[{}^{V_1, \ldots, V_n} / {}_{T_1, \ldots, T_n} \right] \,\middle|\, T_i \in \mathbf{GTERM} \right\}$$

$$H(X) =_{\mathrm{def}} \bigcup_{A \in X} H(A)$$

Grundresolution: Anwenden der Schlußregel

$$\begin{array}{ll} \text{Aus} & \mathbf{K}' \cup \{A\} \\ \text{und} & \mathbf{K}'' \cup \{\neg A\} \\ \hline \text{wird abgeleitet} & \mathbf{K}' \cup \mathbf{K}'' \end{array}$$

Grundresolutionsbeweis aus Grundklauselmenge

KLM: Sammeln aller Klauseln, die sich aus **KLM** und *daraus ableitbaren* Klauseln (induktive Definition) ableiten lassen.

Definition 2.5.6

Sei **KLM** *eine Menge von Grundklauseln.*

$\mathbf{KLM} \vdash_{\mathbf{GR}} \mathbf{K}$

$=_{\text{def}}$ $\mathbf{K} \in \mathbf{KLM}$ *oder*

es gibt einen **Grundresolutionsbeweis**

für $\mathbf{K}$ *aus* **KLM**

Sei $\mathbf{X}$ eine Menge von Alternativen von Literalen.

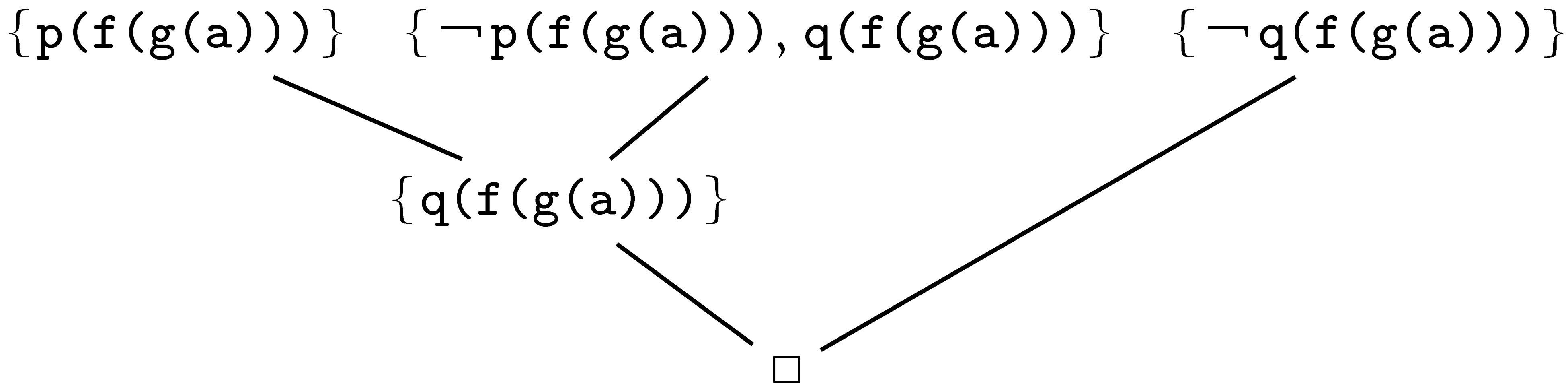
Theorem 2.5.7

$\mathbf{X}$ *hat* kein Modell *genau dann, wenn*

$\mathbf{KLM}(\mathbf{H}(\mathbf{X})) \vdash_{\mathbf{GR}} \Box$.

Beispiel 2.5.2

$$\mathbf{KLM} = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathtt{p(f(g(a)))}\}\ ,\ \{\neg\mathtt{p(f(g(a)))},\mathtt{q(f(g(a)))}\}\ , \\ \{\neg\mathtt{q(f(g(a)))}\} \end{array} \right\}$$



Definition 2.5.7 (Grundresolutionskalkül)
Sei $\mathbf{X} \subseteqq \mathbf{AUSD}$, $\mathbf{A} \in \mathbf{AUSD}$ *und* $\mathbf{X}'$ *eine Menge von Alternativen von Literalen, so dass*

$$\mathbf{X}' \approxeq \mathbf{X} \cup \{\neg \mathbf{A}\}.$$

Dann sei

$$\mathbf{X} \vdash_{\mathbf{G}} \mathbf{A} =_{\text{def}} \mathbf{KLM}\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{X}'\right)\right) \vdash_{\mathbf{GR}} \square.$$

Theorem 2.5.8 (Korrektheit und Vollständigkeit)
Sei $\mathbf{X} \subseteqq$ **AUSD** *und* $\mathbf{A} \in$ **AUSD**. *Dann gilt*

$$\mathbf{X} \Vdash \mathbf{A} \text{ g.d.w. } \mathbf{X} \vdash_{\mathbf{G}} \mathbf{A}.$$

Beispiel 2.5.3

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \{\forall \mathtt{U}\mathtt{p}(\mathtt{U}),\ \forall \mathtt{U}\forall \mathtt{V}\neg \mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{V})) \lor \mathtt{q}(\mathtt{U})\} \\
\mathbf{A} &= \exists \mathtt{W}\mathtt{q}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{W}))) \\
\mathbf{X}' &= \{\mathtt{p}(\mathtt{U}),\ \neg \mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{V})) \lor \mathtt{q}(\mathtt{U}),\ \neg \mathtt{q}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{W})))\} \\
\mathbf{H}(\mathbf{X}') &= \left\{ \begin{array}{l}
\mathtt{p}(\mathtt{a}), \mathtt{p}(\mathtt{g}(\mathtt{a})), \mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{a})), \mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{a}))), \ldots, \\
\neg \mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{a})) \lor \mathtt{q}(\mathtt{a}), \ldots, \\
\neg \mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{a}))) \lor \mathtt{q}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{a}))), \ldots, \\
\neg \mathtt{q}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{a}))), \ldots,
\end{array} \right\} \\
\mathbf{KLM}\Big(\mathbf{H}\big(\mathbf{X}'\big)\Big) &= \left\{ \begin{array}{l}
\{\mathtt{p}(\mathtt{a})\}, \{\mathtt{p}(\mathtt{g}(\mathtt{a}))\}, \\
\{\mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{a}))\}, \{\mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{a})))\}, \ldots, \\
\{\neg \mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{a})), \mathtt{q}(\mathtt{a})\}, \ldots, \\
\{\neg \mathtt{p}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{a}))), \mathtt{q}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{a})))\}, \ldots, \\
\{\neg \mathtt{q}(\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{a})))\}, \ldots,
\end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

2.5.7 Prädikatenlogische Resolution

Idee (Robinson, 1965):

Substitutionen *nach Bedarf* ausführen.

Definition 2.5.8 (Substitution)

Eine Abbildung

$$\mathbf{sub} : \mathbf{VAR} \to \mathbf{TERM}$$

nennen wir **Substitution**.

Sei Z ein Term oder Ausdruck.

Z **sub**:

ersetze in Z alle Variablen $\mathbf{V}$ simultan durch $\mathbf{sub}(\mathbf{V})$.

Notation $\mathbf{sub} = \left[{}^{\mathbf{V}}/{}_{\mathbf{T}}\right]$:

$$\mathbf{sub}(\mathbf{W}) = \begin{cases} \mathbf{T}, & \text{falls } \mathbf{W} = \mathbf{V} \\ \mathbf{W}, & \text{falls } \mathbf{W} \neq \mathbf{V} \end{cases}$$

$\mathbf{sub}_1 \circ \mathbf{sub}_2$: Hintereinanderausführung.

Sei $\mathbf{M}$ eine Menge von Termen oder Ausdrücken.
(Anwendung $\mathbf{M}$ **sub** elementweise definiert)

Definition 2.5.9 (Unifikator)

1. **sub** *heiße* **Unifikator** *für* $\mathbf{M}$
   $=_{\text{def}}$ $\mathbf{M}$ **sub** *ist* einelementig.
2. **sub** *heiße* **allgemeinster Unifikator** *für* $\mathbf{M}$
   $=_{\text{def}}$ **sub** *ist Unifikator für* $\mathbf{M}$ *und für jeden Unifikator* **sub**$'$ *von* $\mathbf{M}$ *existiert* **sub**$''$, *so dass*
   $$\mathbf{sub}' = \mathbf{sub} \circ \mathbf{sub}'' .$$

Theorem 2.5.9 (Unifikationstheorem)
Hat die Menge $\mathbf{M}$ *von Literalen einen Unifikator, so hat* $\mathbf{M}$ *auch einen* allgemeinsten Unifikator.

Unifikationsalgorithmus

`EINGABE:`

Eine nicht-leere endliche Menge $\mathbf{M}$ von Literalen.

sub $:=$ die *identische* Substitution.

`WHILE` **card** $(\mathbf{M}$ **sub** $) > 1$ `DO`

`BEGIN` Wähle $\mathbf{L_1}, \mathbf{L_2} \in \mathbf{M}$ **sub**

sowie die *erste* Stelle, wo sich $\mathbf{L_1}$ und $\mathbf{L_2}$ *unterscheiden*.

`IF` *keines* der Symbole an dieser Stelle ist eine *Variable*

`THEN stop` „**nicht unifizierbar**“

```
ELSE
   BEGIN
      Sei V die Variable und T der Term an dieser
      Stelle.

      IF V kommt in T vor
      THEN stop „nicht unifizierbar"
      ELSE sub := sub ∘ [V/T]

   END;

END;
```

Gib **sub** aus.

Beispiel 2.5.4

$$M_1 = \big\{\{\mathtt{p(U)}\}, \{\mathtt{p(f(V))}\}\big\}$$
$$M_2 = \big\{\{\mathtt{p(U)}\}, \{\mathtt{p(f(U))}\}\big\}$$

Theorem 2.5.10

Der Unifikationsalgorithmus terminiert für jedes $\mathbf{M}$ *und*

1. *gibt „***nicht unifizierbar***" aus*
   g.d.w. $\mathbf{M}$ *nicht unifizierbar ist*
2. *gibt einen allgemeinsten Unifikator* **sub** *für* $\mathbf{M}$ *aus*
   g.d.w. $\mathbf{M}$ *unifizierbar ist*

Prädikatenlogische Resolutionsregel

Sei A ein atomarer Ausdruck.

$\overline{A} =_{\text{def}} \neg A$ und $\overline{\neg A} =_{\text{def}} A$.

$$\begin{array}{ll} \text{Aus} & K' \cup \{L_1, \ldots, L_n\} \\ \text{und} & K'' \cup \{L'_1, \ldots, L'_m\} \\ \hline \text{wird abgeleitet} & \left(K' \cup K''\right) \mathbf{sub} \end{array}$$

wobei **sub** allg. Unifikator von

$\left\{L_1, \ldots, L_n, \overline{L'_1}, \ldots, \overline{L'_m}\right\}$ ist.

Prädikatenlogischer Resolutionsbeweis aus Klauselmenge KLM: Wie bei Grundresolution.

Definition 2.5.10

Sei **KLM** *eine Menge von Klauseln.*

$\mathbf{KLM} \vdash_{\mathbf{PR}} \mathbf{K}$

$=_{\text{def}}$ $\mathbf{K} \in \mathbf{KLM}$ *oder*

ex. ein **prädikatenlog. Resolutionsbeweis**

für $\mathbf{K}$ *aus* **KLM**

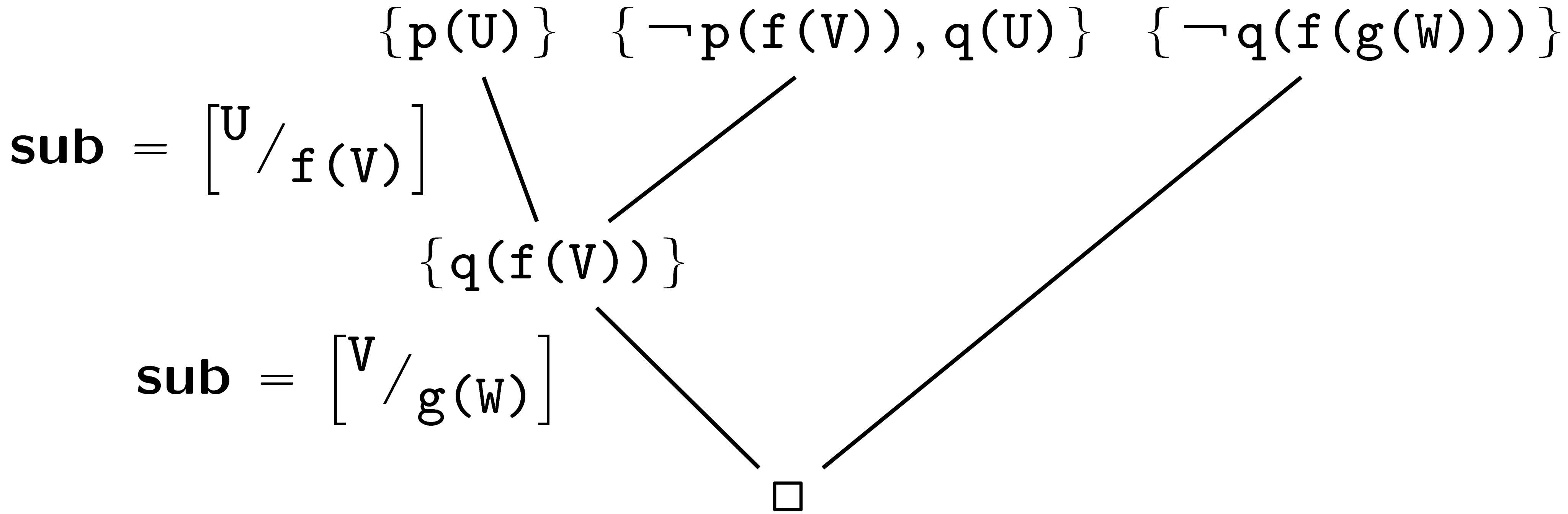
Sei $\mathbf{X}$ eine Menge von Alternativen von Literalen.

Theorem 2.5.11

$\mathbf{X}$ *hat* kein *Modell genau dann, wenn* $\mathbf{KLM}(\mathbf{X}) \vdash_{\mathbf{PR}} \square$.

Beispiel 2.5.5

$$\textbf{KLM} = \Big\{\{\mathtt{p(U)}\}, \{\neg\mathtt{p(f(V))}, \mathtt{q(U)}\}, \{\neg\mathtt{q(f(g(W)))}\}\Big\}$$



Definition 2.5.11 (Prädikatenlog. Resolutionskalkül)
Sei $\mathbf{X} \subseteqq \mathbf{AUSD}$, $\mathbf{A} \in \mathbf{AUSD}$ *und* $\mathbf{X}'$ *eine Menge von Alternativen von Literalen, so dass*

$$\mathbf{X}' \approxeq \mathbf{X} \cup \{\neg \mathbf{A}\}.$$

Dann sei

$$\mathbf{X} \vdash \mathbf{A} =_{\text{def}} \mathbf{KLM}\left(\mathbf{X}'\right) \vdash_{\overline{\mathbf{PR}}} \square.$$

Theorem 2.5.12 (Korrektheit und Vollständigkeit)
Sei $\mathbf{X} \subseteqq \mathbf{AUSD}$ *und* $\mathbf{A} \in \mathbf{AUSD}$. *Dann gilt*

$$\mathbf{X} \Vdash \mathbf{A} \text{ g.d.w. } \mathbf{X} \vdash \mathbf{A}.$$

Theorem 2.6.1
Ist $\mathbf{X}$ **rekursiv aufzählbar**, *so ist auch* **Cons**$(\,\mathbf{X}\,)$ **rekursiv aufzählbar**.

Theorem 2.6.2 (Satz von Church)
Gibt es mindestens ein nullstelliges Funktionssymbol, zwei einstellige Funktionssymbole und ein zweistelliges Prädikatensymbol, so ist für die Sprache **AUSD** *die Allgemeingültigkeit* **unentscheidbar**.

Idee (Kowalski, 1970):

Durch spezielle Klauselnotation und festgelegte **Resolutionsstrategie** Logik zum *Programmieren* nutzen.

2.7.1 Horn-Klauseln

Definition 2.7.1

Eine Klausel $\mathbf{K}$ *heiße* **Horn-Klausel**

$=_{\text{def}}$ $\mathbf{K}$ *enthält höchstens ein* positives Literal.

Was können Horn-Klauseln?

Wir unterscheiden drei Fälle:

Fakten (oder Tatsachenklauseln):

$\mathbf{K}$ besteht aus genau einem positiven Literal, z. B.

$$\mathbf{K} = \{\texttt{gruen(gras)}\}$$

Regeln (oder Prozedurklauseln):

$\mathbf{K}$ enthält ein positives und mindestens ein negatives Literal, z. B.

$$\mathbf{K} = \{\neg\texttt{mensch(X)}, \texttt{sterblich(X)}\}$$
$$\equiv \texttt{mensch(X)} \rightarrow \texttt{sterblich(X)}$$

oder

$$\mathbf{K} = \{\neg\texttt{teilt(2,X)}, \neg\texttt{teilt(3,X)}, \texttt{teilt(6,X)}\}$$
$$\equiv \texttt{teilt(2,X)} \wedge \texttt{teilt(3,X)} \rightarrow \texttt{teilt(6,X)}$$

Anfragen (oder Zielklauseln):

$\mathbf{K}$ enthält nur negative Literale, z. B.

$$\mathbf{K} = \{\neg\texttt{prim(X)}, \neg\texttt{gerade(X)}\}$$
$$\equiv \neg\,(\texttt{prim(X)} \wedge \texttt{gerade(X)})$$

Achtung:

$$\forall\texttt{X}\,(\neg\texttt{prim(X)} \vee \neg\texttt{gerade(X)})$$
$$\equiv \neg\exists\texttt{X}\,(\texttt{prim(X)} \wedge \texttt{gerade(X)})$$

Beispiel 2.7.1 Sei

$$\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathtt{V}\ (\mathtt{mensch(V)} \longrightarrow \mathtt{sterblich(V)})\ , \\ \mathtt{mensch(sokrates)} \end{array} \right\} .$$

Dann gilt

$$\mathbf{X} \Vdash\!\!- \ \exists \mathtt{V}\, \mathtt{sterblich(V)}$$

g.d.w.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\neg \mathtt{mensch(V)}, \mathtt{sterblich(V)}\}, \\ \{\mathtt{mensch(sokrates)}\}, \\ \{\neg \mathtt{sterblich(V)}\} \end{array} \right\} \vdash_{\mathbf{PR}} \square$$

Was können Horn-Klauseln nicht?

Alternativen als Konklusion

$$\texttt{elternteil(X,Y)} \longrightarrow \texttt{vater(X,Y)} \bigvee \texttt{mutter(X,Y)}$$

$$\equiv \{\neg\texttt{elternteil(X,Y)}, \texttt{vater(X,Y)}, \texttt{mutter(X,Y)}\}$$

Negationen

$$\texttt{teil(X,Y)} \bigwedge \neg\texttt{teil(Y,X)} \longrightarrow \texttt{echter\_teil(X,Y)}$$

$$\equiv \{\neg\texttt{teil(X,Y)}, \texttt{teil(Y,X)}, \texttt{echter\_teil(X,Y)}\}$$

2.7.2 Logik-Programme

Notation:

Fakten

Beispiel	dargestellt als
$\{$`mensch(sokrates)`$\}$	`mensch(sokrates).`

Regeln

Beispiel

$\{\neg$`teilt(2,X)`, $\neg$`teilt(3,X)`, `teilt(6,X)`$\}$

dargestellt als

`teilt(6,X)` $\leftarrow$ `teilt(2,X), teilt(3,X).`

Ziele

Beispiel

$\{\neg$`prim(X)`, $\neg$`gerade(X)`$\}$

dargestellt als

```
?-   prim(X),gerade(X).
```

Definition 2.7.2 (Logik-Programm)

1. *Eine Klausel* $\mathbf{K}$ *heiße* **definit** *(oder* **Programm-Klausel***)*
   $=_{\text{def}}$ $\mathbf{K}$ *enthält* genau *ein positives Literal.*
   Das positive Literal heißt **Kopf** *von* $\mathbf{K}$*,*
   die Menge der negativen heißt **Rumpf***.*
2. **KLM** *heiße* **Logik-Programm**
   $=_{\text{def}}$ **KLM** *ist eine Menge von definiten Klauseln.*

2.7.3 SLD-Resolution

„**l**inear resolution with **s**election function for **d**efinite clauses“

Wir definieren eine **Resolutionsstrategie** $\mathtt{SLD}(\mathbf{P}, \mathbf{Z})$, die für ein *Logik-Programm* $\mathbf{P}$ und eine *Zielklausel* $\mathbf{Z}$ bestimmt, ob sich aus $\mathbf{P} \cup \{\mathbf{Z}\}$ die leere Klausel ableiten läßt.

Wir nehmen an, dass sowohl $\mathbf{P}$ als auch $\mathbf{Z}$ *geordnet* sind.

Auf diese Weise wird das **Ausführungsmodell** eines Logikprogramms eindeutig festgelegt.

Festlegung: Resolvent von $\mathbf{Z}$ und Programmklausel $\mathbf{K}$ wird *immer* bzgl. der beiden ersten Literale gebildet.

Die 'restlichen' Literale von $\mathbf{K}$ werden *vorne* an $\mathbf{Z}$ angehängt.

`RECURSIVE FUNCTION SLD(` $\mathbf{P}, \mathbf{Z}$ `).`

`EINGABE:` Logikprogramm $\mathbf{P}$, Zielklausel $\mathbf{Z}$.

`IF` $\mathbf{Z}$ ist leer
`THEN RETURN true`
`ELSE`
  `BEGIN`
    $\mathbf{L}$:= Erstes Literal in $\mathbf{Z}$.

```
LOOP
    K := nächste Klausel in P, deren Kopf mit L̄ unifizierb.

    IF ein K konnte gefunden werden
    THEN
       BEGIN
          Z' := Resolvent von K und L.
          IF SLD(P, Z') THEN RETURN true

       END;

    ELSE RETURN false

ENDLOOP

END
```

Beispiel 2.7.2

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \texttt{sterblich(V)} \leftarrow \texttt{mensch(V).} \\ &\ \texttt{mensch(sokrates).} \\ \mathbf{Z} &= \texttt{?- sterblich(V).} \end{aligned}$$

1. Aufruf von SLD

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &:= \neg\texttt{sterblich(V)} \\ \mathbf{K} &:= \texttt{sterblich(V)} \leftarrow \texttt{mensch(V).} \\ \mathbf{Z}' &:= \texttt{?- mensch(V).} \end{aligned}$$

2. Aufruf von $\mathtt{SLD}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &:= \neg\mathtt{mensch(V)} \\ \mathbf{K} &:= \mathtt{mensch(sokrates).} \\ Z' &:= \square. \end{aligned}$$

3. Aufruf von $\mathtt{SLD}$ $\rightsquigarrow$ Rückgabe $\mathtt{true}$.

2.7.4 Antworterzeugung

Problem: `SLD`$(\mathbf{P}, \mathbf{Z})$ gibt nur `true` oder `false` zurück.

Für Variablen in der Anfrage hätten wir aber gern eine **erfüllende Belegung**.

Lösung: Für jede in $\mathbf{Z}$ vorkommente Variable $\mathbf{V}$ fügen wir $\mathbf{Z}$ ein *Literal* $\neg$`antw("`$\mathbf{V}$`",`$\mathbf{V}$`)` hinzu, das bei der SLD-Resolution ignoriert wird. Die **erfüllende Belegung** wird *automatisch* während der Resolution für $\mathbf{V}$ substituiert. Am Ende werden die **Antwortliterale** aus $\mathbf{Z}$ geeignet ausgegeben.

Beispiel 2.7.3

$$\mathbf{P} = \begin{array}{l}\texttt{sterblich(V)} \leftarrow \texttt{mensch(V).}\\ \texttt{mensch(sokrates).}\end{array}$$

$$\mathbf{Z} = \texttt{?- sterblich(V)}, \texttt{antw("V",V).}$$

1. Aufruf von SLD

$$\mathbf{L} := \neg\texttt{sterblich(V)}$$

$$\mathbf{K} := \texttt{sterblich(V)} \leftarrow \texttt{mensch(V).}$$

$$\mathbf{Z}' := \texttt{?- mensch(V)}, \texttt{antw("V",V).}$$

2. Aufruf von SLD

$$\mathbf{L} := \neg\texttt{mensch(V)}$$

$$\mathbf{K} := \texttt{mensch(sokrates).}$$

$$Z' := \texttt{ ?- antw("V",sokrates).}$$

3. Aufruf von SLD $\leadsto$ Rückgabe „`V = sokrates`“.

2.7.5 Abwandlungen der Resolutionsstrategie

- Erzeugung *aller* Antworten
  $\leadsto$ PROLOG-Ausführungsmodell.

- `SLD` ist *nicht* **vollständig** für die Klasse der **Hornklauseln** (Möglichkeit von Endlosschleifen).

  Breitensuche ist vollständig für die Klasse der Hornklauseln, aber mehr Rechenaufwand; als **Programmiersprache** ungeeignet.

Wir wollen folgende Situation formalisieren:

„Der *Dorfbarbier* rasiert alle, die sich nicht selbst rasieren.“

Frage: Wer rasiert den Dorfbarbier?

Wir wollen zeigen: Die Situation ist **widersprüchlich**, d. h. ein solcher Dorfbarbier kann nicht existieren.

2.8.1 Formalisierung

1. „Der *Dorfbarbier* rasiert alle, die sich nicht selbst rasieren.“

$$\forall \mathtt{B} \left(\mathtt{ba(B)} \longrightarrow \forall \mathtt{P} \; (\neg \mathtt{ra(P,P)} \leftrightarrow \mathtt{ra(B,P)} \,) \right)$$

2. „Es gibt keinen Dorfbarbier.“

$$\neg \exists \mathtt{B} \; \mathtt{ba(B)}$$

2.8.2 Anwendung des Widerlegungssystems

$$\{\forall \mathtt{B}\ \big(\mathtt{ba(B)} \longrightarrow \forall \mathtt{P}\ (\neg \mathtt{ra(P,P)} \leftrightarrow \mathtt{ra(B,P)}\ )\big)\}$$

$$\Vdash\ \neg \exists \mathtt{B}\ \mathtt{ba(B)}$$

g.d.w.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \mathtt{B}\ \big(\mathtt{ba(B)} \longrightarrow \forall \mathtt{P}\ (\neg \mathtt{ra(P,P)} \leftrightarrow \mathtt{ra(B,P)}\ )\big)\ , \\ \exists \mathtt{B}\ \mathtt{ba(B)} \end{array}\right\}$$

hat kein Modell.

2.8.3 Umwandlung in Klauselform

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathtt{B} \left(\mathtt{ba(B)} \longrightarrow \forall \mathtt{P} \left(\neg \mathtt{ra(P,P)} \leftrightarrow \mathtt{ra(B,P)} \right) \right), \\ \exists \mathtt{B}\ \mathtt{ba(B)} \end{array} \right\}$$

($\Rightarrow$ pränexe Normalform)

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathtt{B} \forall \mathtt{P} \left(\mathtt{ba(B)} \longrightarrow \left(\neg \mathtt{ra(P,P)} \leftrightarrow \mathtt{ra(B,P)} \right) \right), \\ \exists \mathtt{B}\ \mathtt{ba(B)} \end{array} \right\}$$

($\Rightarrow$ Skolemisierung)

$$\approx \left\{ \begin{array}{l} \texttt{ba(B)} \rightarrow (\neg\texttt{ra(P,P)} \leftrightarrow \texttt{ra(B,P)}) \ , \\ \texttt{ba(klaus)} \end{array} \right\}$$

($\Rightarrow$ konjunktive Normalform)

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \texttt{ba(B)} \\ \ \rightarrow (\neg\texttt{ra(P,P)} \rightarrow \texttt{ra(B,P)}) \\ \qquad \wedge \ (\neg\texttt{ra(P,P)} \leftarrow \texttt{ra(B,P)}) \ , \\ \texttt{ba(klaus)} \end{array} \right\}$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \neg\,\mathtt{ba(B)} \\ \vee \begin{array}{l} (\,\mathtt{ra(P,P)} \vee \mathtt{ra(B,P)}\,) \\ \quad \wedge\ (\,\neg\mathtt{ra(P,P)} \vee \neg\mathtt{ra(B,P)}\,)\ , \end{array} \\ \mathtt{ba(klaus)} \end{array} \right\}$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} (\,\neg\mathtt{ba(B)} \vee \mathtt{ra(P,P)} \vee \mathtt{ra(B,P)}\,) \\ \wedge\ (\,\neg\mathtt{ba(B)} \vee \neg\mathtt{ra(P,P)} \vee \neg\mathtt{ra(B,P)}\,)\ , \\ \mathtt{ba(klaus)} \end{array} \right\}$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \neg\,\texttt{ba(B)} \vee \texttt{ra(P,P)} \vee \texttt{ra(B,P)}, \\ \neg\,\texttt{ba(B)} \vee \neg\,\texttt{ra(P,P)} \vee \neg\,\texttt{ra(B,P)}, \\ \texttt{ba(klaus)} \end{array} \right\}$$

($\Rightarrow$ Klauselform)

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \{\neg\,\texttt{ba(B)}, \texttt{ra(P,P)}, \texttt{ra(B,P)}\}, \\ \{\neg\,\texttt{ba(B)}, \neg\,\texttt{ra(P,P)}, \neg\,\texttt{ra(B,P)}\}, \\ \{\texttt{ba(klaus)}\} \end{array} \right\}$$

2.8.4 Anwendung der Resolution

$$\left\{\begin{array}{r}\neg\,\mathtt{ba(B)},\\ \mathtt{ra(P,P)},\\ \mathtt{ra(B,P)}\end{array}\right\} \qquad \{\mathtt{ba(klaus)}\} \qquad \left\{\begin{array}{r}\neg\,\mathtt{ba(B)},\\ \neg\,\mathtt{ra(P,P)},\\ \neg\,\mathtt{ra(B,P)}\end{array}\right\}$$

$$\textbf{sub} = \left[{}^{\mathtt{B}}/_{\mathtt{klaus}}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{r}\mathtt{ra(P,P)},\\ \mathtt{ra(klaus,P)}\end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{r}\neg\,\mathtt{ra(P,P)},\\ \neg\,\mathtt{ra(klaus,P)}\end{array}\right\}$$

$$\textbf{sub} = \left[{}^{\mathtt{P}}/_{\mathtt{klaus}}\right]$$

$$\square$$

1. **Semantik**:
   Ein **Ziel** zu *beweisen*, bedeutet zu beweisen, dass es aus dem Programm **folgt**.

2. Programmklauseln sind **allquantifiziert**, Zielklauseln **existenzquantifiziert**.

3. `p, q` bedeutet „`p` *und* `q`“.

4. Die **Negation** kommt nicht mehr vor.

5. Der **Geltungsbereich** einer Variablen ist die Klausel, in der sie vorkommt.

6. Die Resolutionsstrategie verwendet **Tiefensuche**.

7. Ziel und Programmklauselkopf werden **unifiziert**.

Gliederung

1. Erste Schritte
2. Syntax
3. Ausführungsmodell
4. Arithmetik
5. Rekursion
6. Strukturen, Bäume
7. Listen
8. Programmkontrolle

9. Systemprädikate

3.1.1 Literatur

- W. F. Clocksin and C. S. Mellish
  Programming in Prolog, 4th edition, Springer-Verlag 1994
- Leon Sterling and Ehud Shapiro
  The Art of Prolog, 2nd edition, MIT Press 1994
- Richard A. O'Keefe
  The Craft of Prolog, MIT Press 1990
- Ivan Bratko
  PROLOG Programming for Artificial Intelligence
  2nd edition, Addison-Wesley 1990

3.1.2 Logisches Programmieren

Grundlegende Idee:

Robert Kowalski

Algorithm = Logic + Control

Comm. ACM 22, 1979, pp. 424–436.

Logik: *Was* ist das Problem?

Kontrolle: *Wie* wird das Problem gelöst?

What-Type-Language: Der Benutzer spezifiziert das Problem abstrakt; das System berechnet die Lösung.

How-Type-Language: Der Benutzer spezifiziert eine Folge von Operationen, durch die das Problem gelöst wird.

In PROLOG:

- Abstrakte Beschreibung durch **Fakten** und **Regeln**.
- Das System stellt das Lösungsverfahren zur Verfügung

  logisch: Unifikation und Resolution.

  technisch: Matching und Nichtdeterminismus (Backtr.).

3.1.3 Geschichte

1965: Resolutionskalkül (J. A. Robinson)

1970–72 Erster PROLOG-Interpreter R. Kowalski,
Edinburgh (Theorie; Horn-Klauseln)
A. Colmerauer, Marseille (Implementierung)

1975–79 Erster PROLOG-Compiler (D. Warren).

1980 Borland's **Turbo** PROLOG.

1982 Beginn des japanischen **5th Generation** Projekts.

heute Viele Implementierungen,
z. T. erheblich erweitert (z. B. um **constraints**).

3.1.4 Anwendungen

- Künstliche Intelligenz
- deduktive Datenbanken (Datalog)
- symbolische Mathematik
- *constraint programming*
- Konstruktion von Parsern, Interpretern und Compilern
- Konfigurationsaufgaben (z. B. NT-Netzwerkkonfiguration)

Allgemein:

strukturorientierte Verarbeitung **symbolischer** Daten.

3.1.5 Drei Perspektiven bzgl. PROLOG

1. **Pro***gramming in* **Log***ic.*
   Zu ausdrucksschwach $\leadsto$ Theorembeweiser
2. *Database Query Language.*
   Zu ausdrucksstark $\leadsto$ Datalog
3. *Effiziente* **strukturorientierte** *Programmiersprache.*

Programmieren in PROLOG umfaßt

1. Deklarieren von **Fakten**
2. Definieren von **Regeln**

$\left.\right\}$ **Programm**

3. Stellen von **Anfragen**.

3.1.6 Fakten

Schreibweise:

```
mag(klaus, sabine).
```

Prädikat **Konstante** **Argumente**

Prädikate und **Konstanten** beginnen mit einem *Kleinbuchstaben*.

Fakten deklarieren *Eigenschaften von* oder *Relationen zwischen* Objekten.

Beispiel 3.1.1

```
wertvoll(gold).
weiblich(heike).
vater(klaus,heike).
bruder_von(lukas,heike).
```

Die *Bedeutung* von **Prädikaten** und ihren Argumenten muß zu Anfang festgelegt und dann konsequent durchgehalten werden.

Beispiel 3.1.2

Zweistellige Prädikate werden *infix* verstanden:

`bruder_von(lukas,heike)`

$\leadsto$ `lukas bruder_von heike`.

Die Gesamtheit aller Fakten (und Regeln) nennen wir **Datenbasis** oder **logisches Programm**.

3.1.7 Anfragen (oder Ziele)

Schreibweise:

```
?- wertvoll(gold).
```

Anfragen bewirken eine *Suche* in der Datenbasis (*Beweis* des **Ziels** aus dem *logischen Programm*).

Beispiel 3.1.3

```
weiblich(heike).          maennlich(klaus).
vater(klaus,heike).       bruder_von(lukas,heike).
```

```
?- maennlich(klaus).
Yes
?- bruder_von(lukas,heike).
Yes
?- maennlich(lukas).
No
```

Anfragen sind nicht Teil des Programms, sondern werden vom Benutzer an das System gestellt und von diesem beantwortet.

3.1.8 Variablen

Variablen beginnen mit einem Großbuchstaben oder einem Unterstrich.

```
?- maennlich(Mann).
```

Variablen können mit einem Wert **instantiiert** werden und stehen dann für diesen Wert.

Anfragen mit Variablen

Beim Versuch, ein **Ziel** zu **beweisen**, wird das Ziel mit vorhandenen Fakten ge**matcht** (unifiziert).

Beim **matching** dürfen Variablen beliebig instantiiert werden, alles *nicht-variable* muß *exakt* übereinstimmen.

In **Anfragen** sind Variablen **existenzquantifiziert**.

Antworten auf eine Anfrage sind **erfüllende Belegungen** sämtlicher Variablen.

Beispiel 3.1.4

```
maennlich(thomas).        maennlich(klaus).
weiblich(heike).          weiblich(ingrid).
```

```
?- maennlich(Mann).
Mann = thomas ;
Mann = klaus ;
No
```

Variablen in Fakten

Auch Fakten dürfen Variablen enthalten. Eine solche Variable **matcht** alles, was in einem Ziel an dieser Argumentstelle steht.

Eine *mehrfach* vorkommende Variable muß an allen Stellen mit dem gleichen Wert instantiiert werden.

In Fakten sind Variablen **allquantifiziert**.

Beispiel 3.1.5

```
teilt(1,X).
teilt(X,X).
?- teilt(X,2).
X = 1 ;
X = 2 ;
No
```

3.1.9 Suchstrategie

Für jedes Ziel wird die **Datenbasis** von vorn nach dem ersten Fakt durchsucht, das das Ziel **matcht** (Variablen **matchen** alles).

Die Fundstelle wird *markiert* (**choice point**), die Variablen im Ziel (oder Fakt) werden **instantiiert**.

Es wird eine **Antwort** ausgegeben.

Wird eine weitere Lösung angefordert, wird die Instantiierung *zurückgenommen* und ab der markierten Stelle weitergesucht (**Wiedererfüllung**, **REDO**).

3.1.10 Konjunktionen

```
?- mag(klaus, X), mag(heike, X).
```

„,“ wird als **und** gelesen.

Der **Gültigkeitsbereich** von Variablen ist die *gesamte* Konjunktion

$\leadsto$ `X` steht für „alles, was Klaus und Heike mögen“.

Erweiterte Suchstrategie

Variableninstantiierungen bleiben so lange fest, bis sie *zurückgenommen* werden.

Ist für eine gegebene Variableninstantiierung ein **Teilziel** nicht erfüllbar, so schlägt dieses fehl (**fail**), und es wird versucht, das vorherige Teilziel (**choice point**) **wiederzuerfüllen** (**REDO**).

$\leadsto$ Backtracking

Dabei werden evtl. Instantiierungen zurückgenommen.

Beispiel 3.1.6

```
?- mag(klaus, X),
   mag(heike, X).
```

$\left[{}^{\mathtt{X}}/_{\mathtt{tanzen}}\right]$

```
mag(klaus, kino).
mag(klaus, tanzen).
mag(heike, tanzen).
mag(heike, fussball).
```

3.1.11 Regeln

```
bruder(X,Y) :-  maennlich(X),
                eltern(X,E1,E2),
                eltern(Y,E1,E2).
```

„`:-`“ wird als **wenn** gelesen.

Der Teil *vor* dem `:-` heißt **Kopf**,
der Teil *hinter* dem `:-` heißt **Rumpf** der Regel.

Der **Gültigkeitsbereich** von Variablen ist die *gesamte* Regel.

Die Gesamtheit aller Fakten und Regeln für ein **Prädikat** nennen wir die **Klauseln** für dieses Prädikat.

Erweiterte Suchstrategie

Bei der Suche werden nicht nur **Fakten**, sondern auch **Regelköpfe** berücksichtigt.

Um eine Regel zu erfüllen, müssen zuerst sämtliche Ziele aus dem **Rumpf** erfüllt werden —
Variableninstantiierung beachten!

```
?- bruder(X,heike).
   maennlich(X)
   eltern(X,E1,E2)
   eltern(Y,E1,E2)
```

$\left[{}^{\texttt{Y}}/_{\texttt{heike}}\right]$

$\left[{}^{\texttt{X}}/_{\texttt{lukas}}\right]$

$\left[{}^{\texttt{E1}}/_{\texttt{klaus}}\right]$

$\left[{}^{\texttt{E2}}/_{\texttt{ingrid}}\right]$

```
bruder(X,Y) :- maennlich(X),
               eltern(X,E1,E2),
               eltern(Y,E1,E2).
eltern(lukas,klaus,ingrid).
eltern(heike,klaus,ingrid).
weiblich(ingrid).
weiblich(heike).
maennlich(klaus).
maennlich(lukas).
```

3.1.12 Erste Schritte mit SWI-PROLOG

- Nach dem Programmstart mit `pl` wartet SWI-PROLOG auf **Anfragen**.
- Online-Hilfe mit `help`.
- Fakten und Regeln direkt eingeben mit `[user]`. Eingabe beenden mit `C-d`.
- Ein Programm laden mit `['`*Programmname*`']`.
- Nach einer Anfrage werden weitere Lösungen mit `;` angefordert.
- SWI-PROLOG beenden mit `halt.`

```
?- [user].
|: maennlich(karl).
|: weiblich(helga).
|: vater(X,Y) :- eltern(Y,X,_).
|: % user compiled 0.00 sec, 808 bytes

Yes
?- [verwandtschaft].
Warning: (/home/lehmke/IntelliSys/Beispiele/verwandtschaft.pl:8):
        Redefined static procedure weiblich/1
Warning: (/home/lehmke/IntelliSys/Beispiele/verwandtschaft.pl:13):
        Redefined static procedure maennlich/1
% verwandtschaft compiled 0.00 sec, 1,056 bytes

Yes
```

```
?- bruder(X,Y).

X = lukas
Y = lukas ;

X = lukas
Y = heike ;

No
?-
```

3.1.13 Das Wichtigste in Kürze

1. **Fakten** und **Regeln** werden in Programmdateien mit der Endung `.pl` gespeichert.
2. Diese werden **geladen** und dann **Anfragen** gestellt.
3. Um ein **Ziel** zu beweisen, wird ein **matchendes** Faktum oder eine Regel mit **matchendem** Kopf gesucht.
4. Beim **matching** werden **Variablen** passend **instantiiert**.

5. Bei einem passenden Fakt ist ein **Ziel** sofort erfüllt, bei einer Regel müssen zuerst noch die Ziele aus dem **Rumpf** erfüllt werden.

6. Stehen für die Erfüllung eines **Ziels** mehrere Alternativen zur Verfügung, so wird ein **choice point** erzeugt.

7. Schlägt die Erfüllung eines Ziels *fehl*, so wird am zuletzt erzeugten **choice point** die nächste Alternative ausprobiert (**Backtracking**).

3.2.1 Terme

PROLOG-Programme sind aus **Termen** aufgebaut. Wir unterscheiden drei Typen.

Konstanten

Zwei Arten von Konstanten:

Atome dienen als **Bezeichner**.

Beginnen normalerweise mit einem Kleinbuchstaben und enthalten Buchstaben, Ziffern oder _.

Beispiele:

```
bruder   heike   helmut_Kohl   nummer5
```

Man kann beliebige Zeichenfolgen verwenden, wenn man diese *in Hochkommata einschließt*:

```
'KeineVariable'   '12'   'rechts-links'
```

Auch beliebige Folgen der folgenden Zeichen sind Atome:

```
= + - * / \ ~ ^ < > : . ? @ # $ &
```

Beispiele:

```
=    $$$    >=    ==>    ?-    \-/
```

Zahlen 1. Ganze Zahlen:

`0   1   999   123456789   -17`

2. Gleitkommazahlen:

`1.2   -15.0   1.3e5   -17.7e-5`.

Variablen

Beginnen mit einem Großbuchstaben oder _ und enthalten Buchstaben, Ziffern oder _.

`X   L   Mensch   V_23   _intern`

Sonderfall _: **anonyme Variable**. Mehrere anonyme Variablen in einer Klausel dürfen *verschieden* instantiiert werden!

```
maennlich(X) :- eltern(_,X,_).

?- eltern(X,_,_).
X = lukas ;
X = heike ;
No
```

Strukturen

$$\boxed{\mathtt{f(T_1, \ldots, T_n).}}$$

Funktor **Term** **Argumente** **Arität**

Der **Funktor** ist ein **Atom**, die Argumente beliebige **Terme** (rekursive Definition).

Einen Funktor zusammen mit seiner Arität schreiben wir $\mathtt{f/n}$. Verschiedenstellige Funktoren gelten als *verschieden*!

Strukturen können beliebig verschachtelt werden:

```
besitzt(lukas,buch).
besitzt(lukas,buch(momo,ende)).
besitzt(lukas,buch(momo,autor(ende,michael))).
```

3.2.2 Operatoren

Ein- und zweistellige **Funktoren** können als **Operatoren** deklariert werden.

Dies ergibt eine bequemere Schreibweise für **Terme**.

Achtung: Operatoren bewirken *keine* Berechnung, sondern lediglich eine andere Schreibweise für Terme.

2+3 und 3+2 sind *verschiedene* Terme!

Position

Einstellige Operatoren können **Präfix**- oder **Postfixoperatoren** sein. Beispiel:

`-X` $\rightsquigarrow$ `-(X)`   `X!` $\rightsquigarrow$ `!(X)`

Zweistellige Operatoren sind immer **Infixoperatoren**.

`X+1` $\rightsquigarrow$ `+(X,1)`   `X >= Y` $\rightsquigarrow$ `>=(X,Y)`

3.2.3 Matching und Termvergleich

Matching von Termen wird bei der Suche nach einer für ein **Ziel** passenden **Klausel** gebraucht.

Seien T_1, T_2 **Terme**.

Rekursive Definition für „**matche** T_1 und T_2“:

1. T_1 **uninstantiierte Variable** V
   $\leadsto$ **instantiiere** V mit T_2.

2. T_2 **uninstantiierte Variable** W
   $\leadsto$ **instantiiere** W mit T_1.

3. Sind T_1, T_2 (instantiiert zu) **Konstanten**, so matchen T_1, T_2 genau dann, wenn sie *identisch* sind.

4. (Induktionsschritt:) Sind T_1, T_2 **Strukturen**, so matche erst die **Funktoren** und dann die **Argumente** (Stelle für Stelle).

Ausgabe: „Fehlschlag“ oder Terme T_1', T_2', die (nach **Variableneinsetzung**) *identisch* sind.

Achtung! Kein **occur check**,
also sind ‘unendliche’ Terme möglich!

Beispiel 3.2.1
Matche `mag(kuno,kino)` mit `X`.

Matche `lukas` mit `lukas`.

Matche `wasser` mit `seife`.

Matche `1001` mit `1002`.

Matche `1+2` mit `2+1`.

Matche `mag(kuno,kino)` mit `mag(X,kino)`.

Matche `a(b,C,d(e,F,g(h,i,J)))`
mit `a(B,c,d(E,f,g(H,i,j)))`.

Matche `X + Y * 5` mit `A * 7 + B`.

```
?- a(X,f(X),f(Y,Y)) = a(g(A),B,f(h(B),C)),
|      write(a(X,f(X),f(Y,Y))),nl,write(a(g(A),B,f(h(B),C))).
a(g(_G710), f(g(_G710)), f(h(f(g(_G710))), h(f(g(_G710)))))
a(g(_G710), f(g(_G710)), f(h(f(g(_G710))), h(f(g(_G710)))))

X = g(_G710)
Y = h(f(g(_G710)))
A = _G710
B = f(g(_G710))
C = h(f(g(_G710))) ;

No
```

```
?-  X = f(X).

X = f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(...)))))))))) ;

No
```

Vergleich von Termen

```
T1 = T2.
```

`T1` und `T2` **matchen**.

```
T1 \= T2.
```

`T1` und `T2` **matchen nicht**.

Durch `\=` werden *keine* Variablen instantiiert.

$$\boxed{\texttt{T1 == T2.}}$$

`T1` und `T2` **sind identisch**.

Durch **==** werden *keine* Variablen instantiiert.

Beim Test **==** werden **Variablen** als *verschieden* gewertet, wenn sie nicht bereits vorher **identifiziert** wurden.

== ist nicht mit der *logischen* Sichtweise auf PROLOG vereinbar.

```
?- f(X) == f(Y).

No
?- X = Y, f(X) == f(Y).

X = _G257
Y = _G257 ;

No
```

```
T1 \== T2.
```

`T1` und `T2` **sind nicht identisch**.

Durch `\==` werden *keine* Variablen instantiiert.

Vergleich gemäß der **Standardordnung** für (endliche) Terme: `@<`, `@>`, `@=<`, `@>=`.

Durch diese Tests werden *keine* Variablen instantiiert.

```
compare(Op,T1,T2).
```

`Op` ist das Ergebnis der Vergleichs der Terme `T1`, `T2` gemäß der **Standardordnung**. Mögliche Werte: `<`, `>`, `=`.

```
?- compare(Op,X,Y).

Op = <
X = _G234
Y = _G235 ;

No
?- compare(=,X,Y).

No
```

```
?- X = Y, compare(Op,X,Y).

X = _G275
Y = _G275
Op = = ;

No
?- compare(Op,1+2,2+1).

Op = < ;

No
```

3.2.4 Programme

Ein PROLOG-**Programm** ist eine Folge von Termen, jeweils gefolgt von einem .

Kommentare werden mit % abgetrennt und reichen bis zum Ende der Zeile oder werden in /*...*/ eingeschlossen.

3.2.5 Das Wichtigste in Kürze

1. PROLOG-Programme sind aus **Termen** aufgebaut.
2. **Terme** sind **Konstanten** (**Atome**, **Zahlen**), **Variablen** oder **Strukturen**, in denen **Terme** als **Argumente** eines **Funktors** auftreten.
3. Erklärt man einen ein- oder zweistelligen **Funktor** zum **Operator**, darf man ihn in Termen **prefix**, **postfix** oder **infix** verwenden.
4. Mit `T1 = T2` wird festgestellt, ob `T1` und `T2` **matchen**.

5. Mit `T1 == T2` wird festgestellt, ob `T1` und `T2` **identisch** sind.
6. **Kommentare** werden mit `%` abgetrennt oder in `/*...*/` eingeschlossen.

Gegeben ein **Programm** $\mathbf{P}$ und eine Folge $\mathbf{Z}$ von **Zielen**.

1. Wähle das nächste Ziel $\mathbf{L}$ (ist $\mathbf{Z}$ leer $\leadsto$ **Antwort**).
2. Wähle die nächste Klausel $\mathbf{K}$ im Programm, deren **Kopf** mit $\mathbf{L}$ **matcht**.
3. Wenn es noch eine weitere Klausel gibt, die in Frage kommt, erzeuge einen **choice point**.
4. **Instantiiere** Variablen, so daß $\mathbf{L}$ und der Kopf von $\mathbf{K}$ matchen.
5. Hänge den Rumpf von $\mathbf{K}$ *vorn* an $\mathbf{Z}$ an.
6. Beginne von vorn.

7. Schlägt die Suche fehl oder wird eine weitere Lösung angefordert (**redo**), fahre am letzten **choice point** fort (**Backtracking**).

3.3.1 First Argument Indexing

Wann kommt eine Klausel „in Frage“?

$\leadsto$ betrachte den **Funktor** des *ersten* Arguments.

```
eltern(lukas, klaus, ingrid).
eltern(heike,klaus,ingrid).

?- eltern(lukas,V,M).

V = klaus
M = ingrid ;

No
```

```
eltern(sohn(lukas), vater(klaus), mutter(ingrid)).
eltern(sohn(klaus), vater(gustav), mutter(gertrud)).

?- eltern(sohn(lukas),V,M).

V = vater(klaus)
M = mutter(ingrid) ;
 T Redo: (6) eltern(sohn(lukas), _G410, _G411)

No
```

```
eltern(lukas, klaus, ingrid).
eltern(klaus, gustav, gertrud).

?- eltern(K,V,ingrid).

K = lukas
V = klaus ;
 T Redo: (6) eltern(_G377, _G378, ingrid)

No
```

3.3.2 (nicht-)Determinismus

Ein Prädikat heißt **deterministisch**, wenn nach Erzeugen der ersten Lösung keine **choice points** zurückbleiben.

Beispiel 3.3.1 Programm `t_min.pl`.

3.3.3 Das Wichtigste in Kürze

1. Um ein **Ziel** zu erfüllen, wird nach passenden **Klauseln** gesucht.

2. Ob eine Klausel *paßt*, wird mit **first argument indexing** ermittelt.

3. Gibt es mehrere passende Klauseln, wird ein **choice point** erzeugt.

4. Führt die Ausführung eines Prädikats nicht zur Erzeugung von **choice points**, nennt man dieses **deterministisch**.

Problem: Mit den Vergleichsoperatoren in 3.2.11 kann man Zahlen vergleichen. Arithmetische Ausdrücke wie z. B. **1+2** können *nicht* gemäß des von ihnen repräsentierten Zahlenwerts verglichen werden.

3.4.1 Arithmetische Ausdrücke

Induktive Definition: Ein arithmetischer Ausdruck ist

1. eine **Zahl** oder
2. eine **Struktur**, deren Funktor ein **arithmetischer Operator** und deren Argumente arithmetische Ausdrücke sind oder
3. eine **Variable**, die mit einen arithmetischen Ausdruck instantiiert ist.

3.4.2 Arithmetische Operatoren

Beispiele:

Ausdruck	steht für
`-A`	Negation
`A1 + A2`	Summe
`A1 - A2`	Differenz
`A1 * A2`	Produkt
`A1 / A2`	Division
`A1 ** A2`	Exponenzierung
`A1 // A2`	Integer-Anteil der Division (`A1`, `A2` ganz)
`A1 mod A2`	Modulo (`A1` und `A2` *ganz*)
`abs(A)`	Absolutwert

3.4.3 Auswertung eines arithmetischen Ausdrucks

`is(?,+)`	`X is Ausd`

`Ausd` wird gemäß den Regeln der Arithmetik ausgewertet;
das Ergebnis (**Zahl**) wird mit `X` **gematcht**.

3.4.4 Vergleich arithmetischer Ausdrücke

Argumente werden ausgewertet und die Ergebnisse verglichen.

Vergleich	Relation
`A1 =:= A2`	Gleich
`A1 =\= A2`	Ungleich
`A1 < A2`	Kleiner
`A1 > A2`	Größer
`A1 >= A2`	Größer oder Gleich
`A1 =< A2`	Kleiner oder Gleich

3.4.5 Das Wichtigste in Kürze

1. Ein **arithmetischer Ausdruck** darf keine uninstantiierten Variablen enthalten.
2. `is(?,+)` wertet einen arithmetischen Ausdruck aus und matcht das Ergebnis mit einer Variablen.
3. `=:=`, `=\=`, `<`, `>`, `>=`, `=<` werten zwei arithmetische Ausdrücke aus und vergleichen die Ergebnisse.

Beispiel 3.5.1 (Euklidischer Algorithmus)
`gcd(+I,+J,?G)` berechnet den größten gemeinsamen Teiler von `I` und `J` und matcht das Ergebnis mit `G`.

IB: Ist `J` $=$ 0, so soll `G = I` gelten.

```
gcd(I,0,I).
```

IS: Ist `J` $>$ 0, berechne `gcd(J, I mod J, G)`.

```
gcd(I,J,Gcd) :-
        J > 0, K is I mod J, gcd(J,K,Gcd).
```

IH

Dank **last call optimization** ist `gcd` **iterativ** !

Beispiel 3.5.2 (Fakultät) `fact(+N,?F)` berechnet die Fakultät von `N` und matcht das Ergebnis mit `F`.

IB: Ist $N = 0$, so soll `F = 1` gelten.

```
fact(0,1).
```

IS: Ist $N > 0$, berechne `fact(N-1, F')`; es soll `F is N * F'` gelten.

```
fact(N,F) :- N > 0,
  N1 is N - 1, fact(N1,F1),
  F is N*F1.
```

`fact` ist *nicht* iterativ!

Beispiel 3.5.3 (Fakultät iterativ)

Hilfsprädikat `fact(+N,+A,?F)`:

`N` wird heruntergezählt und dabei `A` = `N` * (`N` — 1) * ... **akkumuliert**.

Um `fact(N,F)` zu beweisen, beweise `fact(N,1,F)`.

```
fact(N,F) :- fact(N,1,F).
```

Ist `N` = 0, soll `F = A` gelten.

```
fact(0,F,F).
```

Ist `N` > 0, berechne `fact(N-1,A*N,F)`.

```
fact(N,A,F) :- N > 0,
  N1 is N-1, A1 is A*N, fact(N1,A1,F).
```

Beispiel 3.5.4 (Prädikat mit mehreren Lösungen)

`inbetween(+I,+J,?K)` ist erfüllt,
wenn `K` zwischen `I` und `K` liegt (incl.).

Wenn `I` $\leq$ `J` gilt, ist `K = I` eine Lösung.

```
inbetween(I,J,I) :- I =< J.
```

Wenn `I` $<$ `J` gilt, ist auch `K` mit **`between(I+1,J,K)`** eine Lösung.

```
inbetween(I,J,K) :-
  I < J, I1 is I+1, inbetween(I1,J,K).
```

```
?- inbetween(4,7,N).

N = 4 ;

N = 5 ;

N = 6 ;

N = 7 ;

No
```

3.5.1 Das Wichtigste in Kürze

1. Ein **rekursives Prädikat** besitzt eine Regel, die einen Aufruf desselben Prädikats als Teilziel enthält.

2. Ein **rekursives Prädikat** ist immer **induktiv** aufgebaut:

   Die **Induktionsbasis** (**Abbruchbedingung**) ist ein ausreichend einfacher Fall, daß das Ziel *ohne* rekursiven Aufruf bewiesen werden kann.

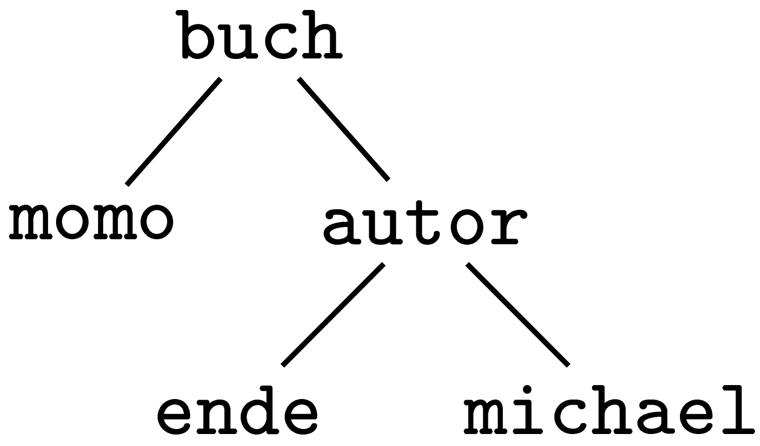
   Im **Induktionsschritt** wird die **Induktionshypothese** (**rekursiver Aufruf**) angewendet.

3. Ein **rekursives Prädikat** kann einen **iterativen Prozeß** definieren, wenn alle rekursiven Aufrufe am *Ende* der jwlg. Regel stehen und zum Zeitpunkt des rekursiven Aufrufs keine **choice points** zurückbleiben (**last call optimization**).

4. Ein nicht-iteratives Prädikat kann durch Einführung eines **Akkumulators** iterativ gemacht werden.

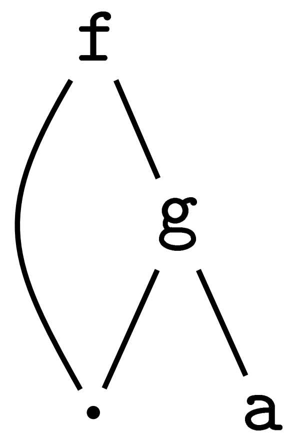
Jede **Struktur** kann als **Baum** aufgefaßt werden.

`buch(momo,autor(ende,michael))`



Identische Variablen in Strukturen führen zu *identischen* Knoten.

`f(X,g(X,a))`

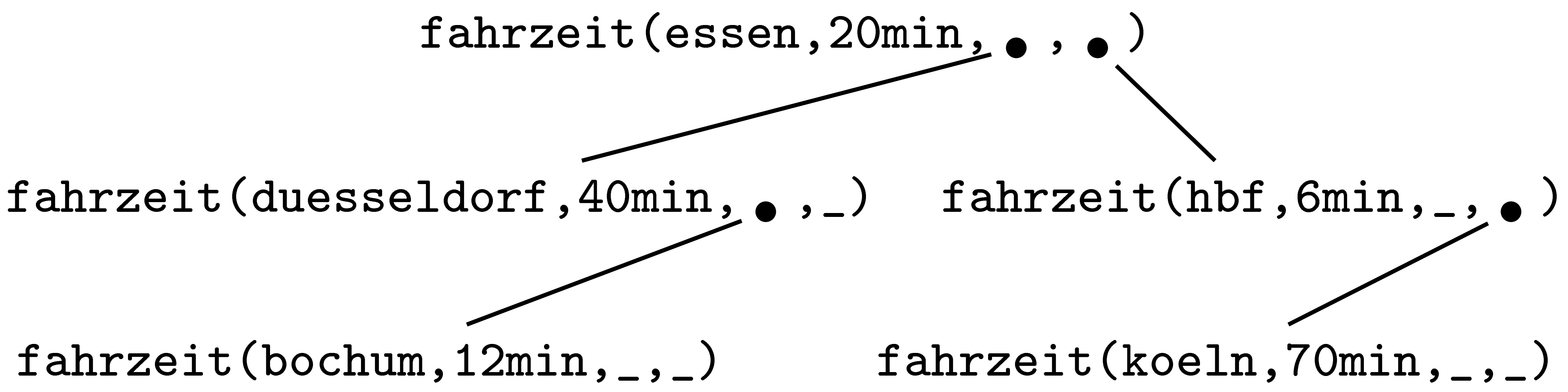


3.6.1 Implizit definierte Bäume

```
fahrzeit(hbf,6min).
fahrzeit(bochum,12min).
fahrzeit(essen,20min).
fahrzeit(duesseldorf,40min).
fahrzeit(koeln,70min).
```

Man erhält eine Baumstruktur durch Verwenden **rekursiv** definierter Strukturen.

Gewünschte Baumdarstellung:



Als Term:

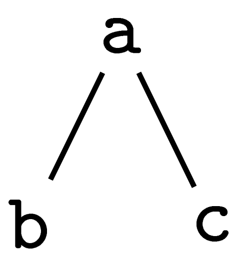
```
fahrzeit(essen,20min,
         fahrzeit(duesseldorf,40min,
                  fahrzeit(bochum,12min,_,_),
                  _
                 ),
         fahrzeit(hbf,6min,
                  _,
                  fahrzeit(koeln,70min,_,_)
                 )
        ).
```

Beispiel 3.6.1 Programm `Baeume1.pl`.

3.6.2 Explizit definierte Bäume

```
bintree(void).
bintree(tree(Element,Left,Right)) :-
        bintree(Left), bintree(Right).
```

Der Baum



wird repräsentiert als

```
    tree(a,tree(b,void,void),tree(c,void,void)).
```

Beispiel 3.6.2 Programm `Baeume2.pl`.

3.6.3 Partielle Strukturen

Eine Struktur, die freie Variablen enthält, nennen wir **partielle** Struktur.

Die Variablen können jederzeit instantiiert werden
$\leadsto$ Flexibilität beim Aufbau der Struktur.

Uninstantiierte Variablen können dupliziert werden
$\leadsto$ 'merken' von *Löchern*.

Beispiel 3.6.3

```
T =
lochb(tree(a,tree(b,_,Loch),tree(c,_,_)),Loch),
Loch = tree(d,_,_).
```

3.6.4 Das Wichtigste in Kürze

1. Jede Struktur kann als **Baum** aufgefaßt werden.
2. Die Datenstruktur **Baum** kann *implizit* durch Verwenden einer rekursiven Datenstruktur implementiert werden.
3. Man kann die Baumstruktur *explizit* machen durch Verwendung einer Struktur

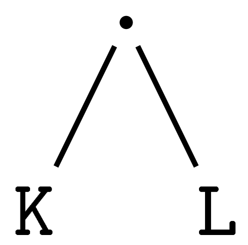
   `tree(Knoten,LinkerTeilbaum,RechterTeilbaum)`
4. **Partielle Strukturen** können als Strukturen mit *Löchern* aufgefaßt werden, wobei man die Löcher *explizit* repräsentieren kann.

Induktive Definition: eine **Liste** ist

IB: die **leere Liste** `[]` oder

IS: eine *Struktur* `.(K,L)`, wobei `K` (**Kopf** der Liste) ein beliebiger Term und `L` (**Rumpf** der Liste) wieder eine Liste ist.

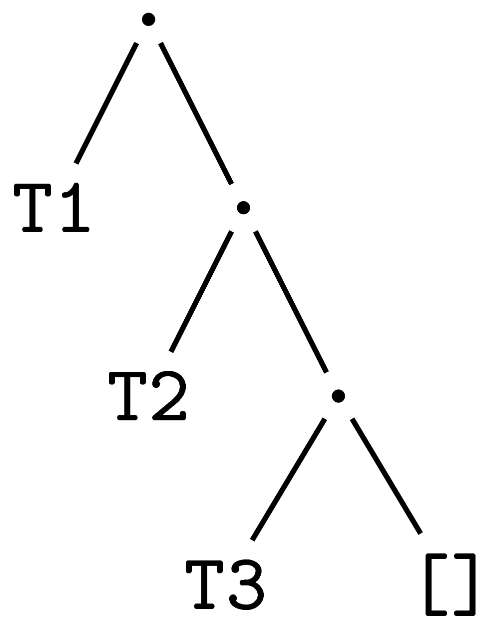
Baumnotation:



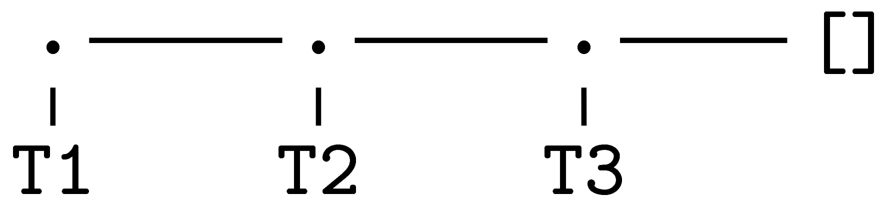
Alternative Notation:

`.(K,L)`	`[K|L]`
`.(T1,.(T2,.(T3,[])))`	`[T1,T2,T3]`

Baumdarstellung für [T1,T2,T3]:



Alternativ:



Listen können verschachtelt werden:

```
[a,V1,b,[X,Y]]

.  ----  .  ----  .  ----  .  ----  []
|        |        |        |
a        V1       b        .  ----  .  ----  []
                           |        |
                           X        Y
```

Beispiel 3.7.1

```
p([1,2,3]).  p([1,2,3,[4,5,6]]).

?- p([X|Y]).

X = 1
Y = [2, 3] ;

X = 1
Y = [2, 3, [4, 5, 6]] ;

No
```

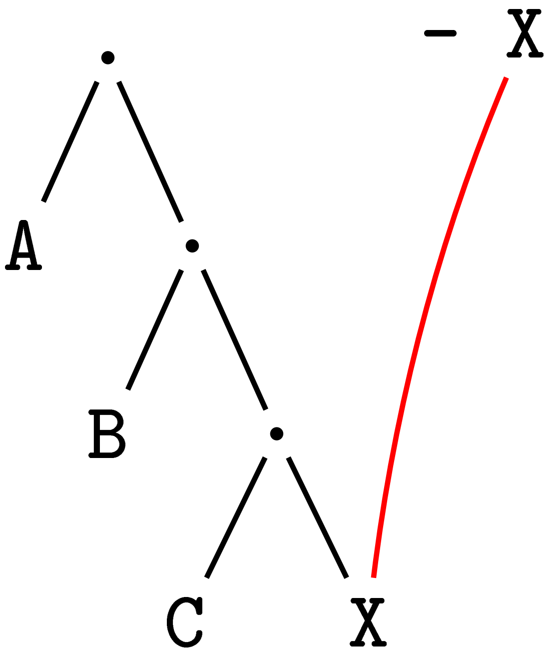
```
?- p([_,_,_,[_|X]]).

X = [5, 6] ;

No
```

Beispiel 3.7.2 Programm `listen.pl`.

Listen mit ‘Löchern’: Differenzlisten

Eine **Differenzliste** ist eine **partielle Liste**, die ein ‘Loch’ am Ende hat, zusammen mit dem Loch.

Beispiel 3.7.3 `[a,b,c|X]-X`, repräsentiert als Baum:



In einer **Differenzliste** `FL - D` ist `FL` ein *'Versprechen'* für die vollständige Liste und `D` der Anteil, der zur vollen Liste noch fehlt.

Der eigentliche *Inhalt*, der durch `D=[]` erhalten wird, ist also tatsächlich in gewissem Sinne die *Differenz* zwischen `FL` und `D`.

Aneinanderhängen von Differenzlisten:

```
dl_append(A-M, M-R, A-R).
```

Beispiel 3.7.4 Programm `listen.pl`.

Das Wichtigste in Kürze

1. Eine **Liste** ist eine spezielle Struktur mit Funktor `..`
2. Schreibweise `[K|R]` (statt `.(K,R)`) für eine Liste mit Kopf `K` und Rumpf `R`.
3. Operationen auf Listen sind **rekursiv**: Behandle zuerst den Kopf, dann (rekursiver Aufruf) den Rumpf.
4. **Akkumulatoren** können bei der Listenverarbeitung die Effizienz verbessern.

5. Eine **Differenzliste** ist eine partielle Struktur, die anstelle mit der leeren Liste mit einem *Loch* (uninstantiierte Variable) abgeschlossen wird, das explizit repräsentiert wird. Durch Instantiieren mit dem Loch kann an die Liste etwas *hinten* angehängt werden.

Bisher haben wir hauptsächlich die **logische Semantik** eines PROLOG-Programmes betrachtet.

Diese ist wichtig, um logische Zusammenhänge leicht *korrekt* zu modellieren.

Um PROLOG-Programme **effizient** zu implementieren, muß aber auch die **prozedurale Semantik** beachtet werden, die sich aus dem **Ausführungsmodell** ergibt.

Die folgenden **Systemprädikate** betreffen die prozedurale Semantik und erlauben, die Ausführung eines PROLOG-Programmes zu beeinflussen.

3.8.1 Der Cut

Das **Ziel** $\boxed{!}$ ist immer erfüllbar und bewirkt einen *Nebeneffekt*: Alle **choice points**, die für das aktuelle Ziel noch existieren,

- sowohl choice points zu Teilzielen
- als auch der choice point, der auf alternative Klauseln zum aktuellen Ziel zeigt,

werden *gelöscht*.

Der **Cut** bewirkt, daß das aktuelle Prädikat sich auf alle bisher getroffenen Entscheidungen *festlegt*.

Grüne Cuts

Ein **grüner Cut** entfernt choice points, die *nicht* zu neuen Lösungen führen.

Ein grüner Cut verändert nicht die **logische Semantik** eines Programms, sondern verhindert nur, daß beim Beweis 'sinnlose' Teilziele verfolgt werden.

Auf diese Weise kann man ein Prädikat **deterministisch** machen, das es eigentlich sein sollte, es aber nicht ist, weil dies vom Compiler nicht erkannt wird.

Beispiel 3.8.1

```
fact(0,F,F) :- !.
fact(N,A,F) :- N > 0,
   N1 is N-1, A1 is A*N, fact(N1,A1,F).
```

Beispiel 3.8.2 Programm `cut.pl`.

Rote Cuts

Schneiden **Lösungen** ab.

Können eingesetzt werden, um unerwünschte Lösungen zu verhindern.

3.8.2 Alternative. IF-THEN-ELSE.

Werden Ziele mit $\boxed{;}$ verknüpft (bindet schwächer als ,), so wird erst versucht, die linke Seite des ; zu beweisen. Schlägt dies fehl, so wird versucht, die rechte Seite des ; zu beweisen.

Beispiel 3.8.3
```
elternteil(X, Y) :-
    (
        vater(X, Y)
    ;
        mutter(X, Y)
    ).
```

Das Konstrukt `IF <A> THEN <B> ELSE <C>` kann man implementieren als

```
(
      <A>, !, <B>
;
      <C>
).
```

Hierfür gibt es die spezielle Notation

`( <A> -> <B> ; <C> )`.

Beispiel 3.8.4

```
fact(N,A,F) :-
        (
            N =:= 0 -> A = F
        ;
            N1 is N-1, A1 is A*N, fact(N1,A1,F)
        ).
```

3.8.3 Fail. Negation.

Das Ziel `fail` schlägt immer fehl.

Die Kombination `!, fail` kann genutzt werden, um *unerwünschte Alternativen* auszuschließen.

Beispiel 3.8.5

```
schweizer_garde_geeignet(X) :-
            groesse(X,H),
            H < 184,
            !, fail.
```

Beispiel 3.8.6

```
not(X) :-
        (
            call(X) -> fail
        ;
            true
        ).
```

Für `not` gibt es die spezielle Notation $\boxed{\texttt{\textbackslash+}}$.

Beispiel 3.8.7

```
disjunkt(L1,L2) :- \+ ( member(X,L1), member(X,L2) ).
```

Beispiel 3.8.8 Wenn wir Prädikate mit Nebeneffekten einsetzen (z. B. I/O), können wir alle Lösungen eines Ziels folgendermaßen abarbeiten (failure-driven loop):

```
alle_Loesungen :-
        (
            ziel(X),
            verarbeite(X),
            fail
        ;
            true
        ).
```

3.9.1 Manipulation und Aufruf von Termen

`functor(?T,?F,?A).`	Matcht `T` mit einer **Struktur**, die den **Funktor** `F` und die **Arität** `A` hat.
`arg(+N,+T,?Arg).`	Matcht das `N`-te **Argument** von **Struktur** `T` mit `Arg`.

`?Term =.. ?Liste.`	Matcht `Term` mit der **Struktur**, deren **Funktor** der Kopf von `Liste` ist und deren **Argumente** die restlichen Listenelemente bilden.

`call(+Goal).`	Ruft den Term `Goal` als **Ziel** auf.

Beispiel 3.9.1

```
mapfunc([], [], _).

mapfunc([K|R], [MK|MR], F) :-
        functor(Ziel,F,2),
        arg(1,Ziel,K),
        arg(2,Ziel,MK),
        call(Ziel),
        mapfunc(R,MR,F).
```

Alternativ:

```
mapfuncx([], [], _).

mapfunc([K|R], [MK|MR], L) :-
        append(L,[K,MK],ZL),
        Ziel =.. ZL,
        call(Ziel),
        mapfunc(R,MR,L).
```

Achtung! `call` ist ‘undurchdringlich’ für den **cut**.

3.9.2 Compiliert vs. Interpretiert

`:- dynamic(pred/n).`	Erklärt das `n`-stellige Prädikat `pred` als **dynamisch**. Dieses wird **interpretiert** und darf manipuliert werden.

3.9.3 Inspektion der Datenbasis

`clause(+Clause).`	**Matcht** `Clause` mit einer **dynamischen Klausel**, falls dies möglich ist.

3.9.4 Alle Antworten

`findall(?T,+Z,?L).`	**Matcht** `L` mit einer Liste *aller* **Instanzen** von Term `T`, für die Ziel `Z` **erfüllbar** ist. **Deterministisch** !
`bagof(?T,+Z,?L).`	**Instantiiert** alle Variablen in Ziel `Z`, die nicht in `T` vorkommen, so dass `Z` **erfüllbar** ist, und **matcht** `L` mit einer Liste *aller* Instanzen von Term `T`, für die `Z` **erfüllt** ist. Evtl. **nichtdeterministisch**.
`setof(?T,+Z,?L).`	Wie `bagof`, aber ohne **Duplikate**.

Beispiel 3.9.2 Programm `findall.pl`.

3.9.5 Manipulation der Datenbasis

`assert(+Clause).`	Fügt die Klausel `Clause` der Datenbasis hinzu.
`asserta(+Clause).`	Fügt die Klausel `Clause` am *Anfang* der Datenbasis hinzu.
`assertz(+Clause).`	Fügt die Klausel `Clause` am *Ende* der Datenbasis hinzu.

`retract(+Clause).`	*Entfernt* die erste Klausel, die `Clause` **matcht**, aus der Datenbasis.
`retractall(+Clause).`	*Entfernt* alle Klauseln, die `Clause` **matchen**, aus der Datenbasis.

Das Prädikat, das definiert oder gelöscht wird, muß als **dynamisch** deklariert sein.

Beispiel 3.9.3 Programm `tab.pl`.

`abolish(+Pred).`	Entfernt das Prädikat `Pred` *vollständig* aus der Datenbasis. `Pred` darf für `prädikatname` oder für `prädikatname/arität` stehen.

Das Prädikat kann **statisch** oder **dynamisch** sein.