Logik

Wie kann ich Aussagen formal aufschreiben?

Wie kann man Aussagen miteinander verknüpfen?

Wie kann man formal Schlüsse ziehen und Beweise führen?

“ Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?” wurde ein 100-jähriger gefragt. “ Ich halte mich streng an die Diätregeln: Wenn ich Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich imme Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.” (Schöning, 92)

Einsatz von Logik

Philosophie:

- Was ist Wahrheit?

Mathematik:

- Welche Theorien lassen sich axiomatisieren?
- Welches sind Modelle für ein Axiomensystem?

Informatik:

- Künstliche Intelligenz (Sprachverarbeitung, Maschinelles Lernen, ...)
- Programmverifikation
- Semantik von Programmiersprachen
- Automatisches Beweisen
- Logik-Programmierung

viele weitere...

Syntax und Semantik

Syntax: Formen

Semantik: Bedeutung (**Wahrheitsgehalt**, Sinn)

- “Hoffentlich komme ich heute nicht zu spät!”

- “Der Stuhl ist rot.”

- Kind: “Der Teddy will Schokolade!”

Aussagenlogik

Jeder Sachverhalt wird zu einem atomaren Ausdruck (**Aussagen**) zusammengefaßt.

A = “Paris ist die Hauptstadt von Frankreich”

B = “Mäuse jagen Elefanten”

A und B sind **Aussagenvariablen**.

Syntax der Aussagenlogik

Definition: Eine **atomare Formel** hat die Form A, B, C, ...

Formeln sind induktiv definiert:

- Alle atomaren Formeln sind Formeln.
- Für alle Formeln A und B ist $(A \wedge B)$ eine Formel.
- Für alle Formeln A und B ist $(A \vee B)$ eine Formel.
- Für jede Formel A ist $\neg A$ eine Formel.

Beispiele:

- A
- $\neg D$
- $\neg((A \wedge B) \vee \neg C)$
- $((A \vee B) \wedge C) \wedge \neg A)$

Abkürzende Schreibweisen

Wir schreiben auch:

- $(A \rightarrow B)$ statt $(\neg A \vee B)$
- $(A \leftrightarrow B)$ statt $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$
  $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

Beispiel

“ Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?” wurde ein 100-jähriger gefragt. “ Ich halte mich streng an die Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich imme Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.” (Schöning, 92)

Beispiel

“ Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?” wurde ein 100-jähriger gefragt. “ Ich halte mich streng an die Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich imme Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.” (Schöning, 92)

$$(\neg B \rightarrow F)$$

$$((B \wedge F) \rightarrow \neg E)$$

$$((E \vee \neg B) \rightarrow \neg F)$$

“Zu jeder Mahlzeit trinke ich Bier und esse nie gemeinsam Fisch und Eiscreme.”

Semantik der Aussagenlogik

Definition: Die Elemente der Menge {0,1} heißen **Wahrheitswerte**.

Eine **Belegung** weist jeder Aussage einen Wahrheitswert zu.

Eine Wahrheitswert A(F) einer Formel F ist induktiv definiert:

Für jede atomare Formel F ist A(F) entsprechend der Belegung.

- $A((F \wedge G)) = \begin{cases} 1, falls (A(F) = 1) und (A(G) = 1) \\ 0, sonst \end{cases}$
- $A((F \vee G)) = \begin{cases} 1, falls (A(F) = 1) oder (A(G) = 1) \\ 0, sonst \end{cases}$
- $A(\neg F) = \begin{cases} 1, falls (A(F) = 0) \\ 0, sonst \end{cases}$

Wahrheitstafeln

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Wahrheitstafeln

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$(A \to B)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Wahrheitswert einer Formel

Ist die Formel

$$((A \lor B) \land C) \land \neg A)$$

für die Belegung A

- A(A)=1
- A(B)=0
- A(C)=1

erfüllt?

Modell

Definition: Wenn wir eine Belegung A haben, so daß die Formel F wahr ist, dann nennen wir A ein **Modell** für F.

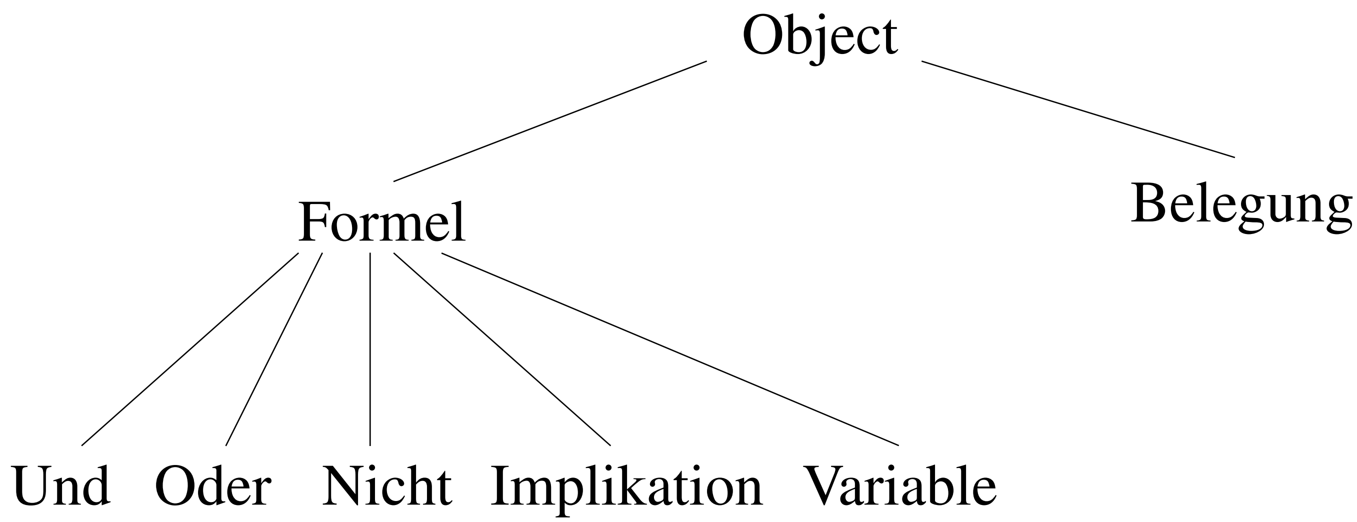
Beispiel:

$$((A \quad \vee \quad B) \quad \wedge \quad C) \quad \wedge \quad \neg A \quad)$$

Welche Belegungen sind Modell für die Formel?

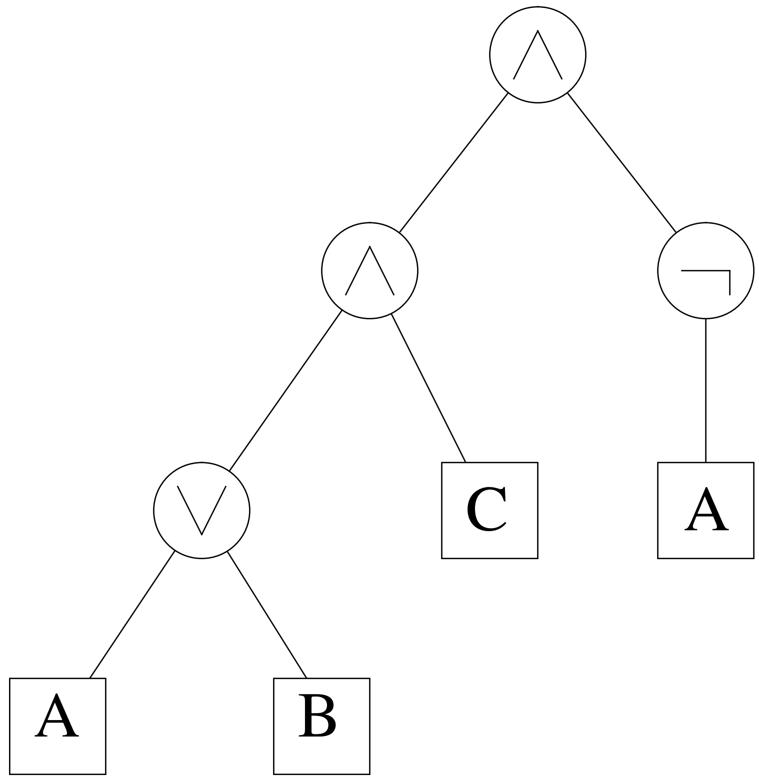
- A(A)=
- A(B)=
- A(C)=

Java-Programm



Formeln als Operatorbaum

$$((A \lor B) \land C) \land \neg A)$$



Operatoren: Knoten
Aussagen: Blätter

Abstrakte Klasse für logische Formeln

```
public abstract class Formel {

  abstract boolean wahrheitswert (Belegung belegung);

  abstract void trageVariablenEin(Belegung belegung);

  boolean erfuellbar () {
    boolean erfuellbar = false;
    Belegung belegung = new Belegung(this);
    System.out.println ("Gueltige Belegungen:");
    do {
      if (wahrheitswert (belegung)) {
            System.out.println (belegung);
            erfuellbar = true;
      }
    } while (belegung.next ());
    System.out.println ("Fertig!");
    return(erfuellbar);
  }
}
```

Klasse für logischen Operator: UND

```
class Und extends Formel {
  Formel links, rechts;

  Und (Formel l, Formel r) {
    links = l;
    rechts = r;
  }

  boolean wahrheitswert (Belegung belegung) {
    return links.wahrheitswert (belegung) && rechts.wahrheitswert (belegung);
  }
}
```

Klasse für logischen Operator: ODER

```
class Oder extends Formel {
   Formel links, rechts;

  Oder (Formel l, Formel r) {
    links = l;
    rechts = r;
  }

  boolean wahrheitswert (Belegung belegung) {
    return links.wahrheitswert (belegung) || rechts.wahrheitswert (belegung);
  }
}
```

Klasse für logischen Operator: NICHT

```
class Nicht extends Formel {
  Formel nachf;

  Nicht (Formel n) {
    nachf = n;
  }

  boolean wahrheitswert (Belegung belegung) {
    return !nachf.wahrheitswert (belegung);
  }
}
```

Klasse für logischen Operator: IMPLIKATION

```
class Implikation extends Formel {
   Formel links, rechts;

  Implikation (Formel l, Formel r) {
    links = l;
    rechts = r;
  }

  boolean wahrheitswert (Belegung belegung) {
    return (!links.wahrheitswert (belegung) || rechts.wahrheitswert (belegung));
  }
}
```

Klasse für Aussagenvariablen

```
class Var extends Formel {
  String name;

  Var (String _name) {
    name = _name;
  }

  boolean wahrheitswert (Belegung belegung) {
    return (belegung.get (this));
  }

  public String toString() {
    return(name);
  }
}
```

```
class Belegung {
  Hashtable table;

  Belegung (Formel formel) {
    table = new Hashtable ();
    formel.trageVariablenEin(this);
  }

  void addVariable (Var var) {
    table.put(var,Boolean.FALSE);
  }

  boolean get (Var var) {
    return ((Boolean)table.get (var)).booleanValue();
  }

  void put (Var var, boolean val) {
    table.put(var, new Boolean(val));
  }
  public String toString () {
    return table.toString ();
  }
```

```
  boolean next () {
    Iterator iterator = table.keySet ().iterator ();

    boolean carry = true;

    while (iterator.hasNext () && carry) {
      Var var = (Var) iterator.next ();
      carry = get (var);
      put (var, !carry);
    }
    return !carry;
  }
}
```

Beispiel 1

```
public static void main (String args []) {

    Var a = new Var ("A");
    Var b = new Var ("B");
    Var c = new Var ("C");

    Formel f = new Und (  new Und (new Oder (  a,
                                               b),
                                   c),
                          new Nicht (a));

    f.erfuellbar ();
  }
}
```

Beispiel 1: Ergebnis

Gueltige Belegungen:
{B=true, C=true, A=false}
Fertig!

Beispiel 2

```
public static void main (String args []) {
  Var b = new Var ("Bier");
  Var f = new Var ("Fisch");
  Var e = new Var ("Eis");

  Formel formel = new Und(   new Und(   new Implikation(   new Nicht(b),
                                                          f),
                                        new Implikation(   new Und(b,f),
                                                          new Nicht(e))),
                             new Implikation(  new Oder(e, new Nicht(b)),
                                               new Nicht(f)));

  formel.erfuellbar ();
}
```

Beispiel 2: Ergebnis

Gueltige Belegungen:
{Fisch=false, Bier=true, Eis=false}
{Fisch=true, Bier=true, Eis=false}
{Fisch=false, Bier=true, Eis=true}
Fertig!

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition: Eine Formel nennen wir **erfüllbar**, wenn sie mindestens ein Modell hat. Anderenfalls nennen wir sie **unerfüllbar (oder widersprüchlich)**.

- $((A \vee B) \wedge C) \wedge \neg A)$

- $(A \wedge \neg A)$

Definition: Eine Formel nennen wir **allgemeingültig (oder eine Tautologie)**, wenn jede Belegung ein Modell für die Formel ist.

- $(A \vee \neg A)$

Umformungsregeln

$$A \leftrightarrow \neg(\neg A)$$

$$(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \qquad (A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Semantische Folgerung

Definition: Eine Formel F **folgt (semantisch)** aus einer Formel(menge) X genau dann wenn jedes Modell für X auch ein Modell für F ist.

Beispiel

Von vier Kindern hat eines einen Ball in ein Fenster geworfen. Anne sagt: “Emil war’s!” Emil sagt: “Nein, Gustaf!” Gustaf sagt: “Emil lügt!” Fritz sagt: “Ich war’s nicht!” Nur ein Kind sagt die Wahrheit, alle anderen lügen.

$$
\begin{array}{ll}
Awahr \leftrightarrow Eball & Awahr \rightarrow \neg Ewahr \wedge \neg Fwahr \wedge \neg Gwahr \\
Ewahr \leftrightarrow Gball & Ewahr \rightarrow \neg Awahr \wedge \neg Fwahr \wedge \neg Gwahr \\
Gwahr \leftrightarrow \neg Ewahr & Gwahr \rightarrow \neg Awahr \wedge \neg Ewahr \wedge \neg Fwahr \\
Fwahr \leftrightarrow \neg Fball & Fwahr \rightarrow \neg Awahr \wedge \neg Ewahr \wedge \neg Gwahr
\end{array}
$$

$$Aball \rightarrow \neg Eball \wedge \neg Fball \wedge \neg Gball$$

$$Eball \rightarrow \neg Aball \wedge \neg Fball \wedge \neg Gball$$

$$Gball \rightarrow \neg Aball \wedge \neg Eball \wedge \neg Fball$$

$$Fball \rightarrow \neg Aball \wedge \neg Eball \wedge \neg Gball$$

$$Aball \vee Eball \vee Fball \vee Gball$$

$$Awahr \vee Ewahr \vee Fwahr \vee Gwahr$$

Syntaktische Ableitung

Syntaktische Rekonstruktion der Folgerung.

Ableitungsregeln (z. B.):

$$\frac{(P \vee C), (\neg P \vee D)}{C \vee D} \qquad \frac{A, (A \rightarrow P)}{P}$$

Korrektheit: Jede Formel, die mittels der Ableitungsregeln abgeleitet werden kann, kann auch semantisch gefolgert werden.

Vollständigkeit: Jede Formel, die semantische gefolgert werden kann, kann auch mittels der Ableitungsregeln abgeleitet werden.

Beweis durch Widerlegung (Kontraposition)

Frage: Folgt aus X die Formel F?

$$\Leftrightarrow (X \rightarrow F) \qquad allgemeingueltig$$
$$\Leftrightarrow \neg(X \rightarrow F) \qquad widerspruechlich$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg X \vee F) \qquad widerspruechlich$$
$$\Leftrightarrow (X \wedge \neg F) \qquad widerspruechlich$$

Beispiel

Frage: Folgt aus den Regeln, daß Anne lügt (X folgt $\neg Awahr$)?

Weitere Logiken

- Prädikatenlogik 1. Stufe

- Prädikatenlogik 2. Stufe
- Nicht-Monotone Logiken
- Mehrwertige Logiken
- Fuzzy Logic
- Temporal-Logiken
- Modal-Logiken
- ...