Logik

- Gute Gründe, etwas für wahr zu halten, sind nach Euler:
  das Zeugnis der Sinne
  das Zeugnis glaubwürdiger Personen
  ein richtiger Schluß.
- Lösung eines Problems ohne dessen sinnliche Anschauung, einzig anhand der <u>Form</u> der Problembeschreibung --> Logik.
- Wann sind zwei Formen eigentlich gleich?
- Welche Formen können aus einer Menge von Formen abgeleitet werden?

„eigentlich gleich“

- Überführen einer Form in eine andere durch wahrheitserhaltende Manipulationen
- „eigentlich gleich“ heißt: gleicher Wahrheitswert!

Forme(l)n

Syntax (griechisch: Anordnung)
verabredete Zeichen in verabredeter Anordnung

Bedeutung

- Bezeichner bedeuten Bezeichnetes
  z.B. „Löwe“ bedeutet 
- Aussage bedeutet Wahrheitswert
  z.B. „Baum hat Blätter“, „Uta ist 1,68 m groß“

Sinn

- Hoffnungen, Wünsche, Befürchtungen haben keine Bedeutung, aber Sinn.

Aussagenlogik

Syntax

- Wahrheitswerte, Aussagensymbole sind Formeln
- Sind A und B Formeln, so auch:
  ¬ A, A & B, A v B, A --> B, A <--> B
- Das sind alle Formeln.

Semantik

- Nur Bedeutung, Sinn ist nicht formalisiert.

Wahrheit

- Belegung einer Formel A:
  Abbildung einer Formel auf {w,f}
- Auswertung einer Formel A:
  Ist A wahr unter einer Belegung?
  Wahrheitstafeln anwenden!
- Eine Formelmenge X ist unter einer Belegung wahr, wenn jede Formel der Menge unter der Belegung wahr ist.

A --> B ≡ ¬ A v B

A <--> B ≡ A --> B & B--> A

¬	w	f
	f	w

&	w	f
w	w	f
f	f	f

v	w	f
w	w	w
f	w	f

Awahr	V	Ewahr	V	Fwahr	V	Gwahr			
Awahr	↔	Eball							
Ewahr	↔	Gball							
Fwahr	↔	¬	Fball						
Gwahr	↔	¬	Ewahr						
Awahr	→	¬	Ewahr	&	¬	Fwahr	&	¬	Gwahr
Ewahr	→	¬	Awahr	&	¬	Fwahr	&	¬	Gwahr
Fwahr	→	¬	Awahr	&	¬	Ewahr	&	¬	Gwahr
Gwahr	→	¬	Awahr	&	¬	Ewahr	&	¬	Fwahr
Aball	→	¬	Eball	&	¬	Fball	&	¬	Gball
Eball	→	¬	Aball	&	¬	Fball	&	¬	Gball
Fball	→	¬	Aball	&	¬	Eball	&	¬	Gball
Gball	→	¬	Aball	&	¬	Eball	&	¬	Fball
Aball	v	Eball	v	Fball	v	Gball			

Belegungen

Wann ist die Formel wahr?

Gwahr	→	¬	Awahr	&	¬	Ewahr	&	¬	Fwahr
f	→	¬	w	&	¬	f	&	¬	f
f	→	¬	f	&	¬	w	&	¬	f
f	→	¬	f	&	¬	f	&	¬	w
f	→	¬	f	&	¬	f	&	¬	f
w	→	¬	f	&	¬	f	&	¬	f

Was passiert mit allen anderen Formeln, wenn Gwahr wahr ist?

Widerspruchsbeweis -- Beispiel

Gibt es Belegungen, so dass Awahr w ist und alle Formeln sind w? Nein!

Awahr	→	¬	Ewahr	&	¬	Fwahr	&	¬	Gwahr
w	w	w	f	w	w	f	w	w	f
Gwahr	↔	¬	Ewahr						
f	f	w	f						

Awahr kann nicht gelten.

Anne hat gelogen.

solve

```
solve(1).
solve(0):-!, fail.
solve(neg(A)):-not(solve(A)).        %Verknüpfungen definieren
solve(and(A,B)):-solve(A),solve(B).
solve(or(A,B)):-solve(A) ; solve(B).
...

solve([]).                           % Menge von Formeln testen
solve([Erst|Rest]):-
 solve(Erst),
 solve(Rest).
```


instantiate

```
instantiate([]).
instantiate([1|Liste]):-instantiate(Liste).
instantiate([0|Liste]):-instantiate(Liste).

?-instantiate([A,B]).
    A = B = 1 ;
    A = 1, B = 0 ;
    A = 0, B = 1;
    A = B = 0;
    no
```


Welche Belegungen machen alle Formeln wahr?

Alle Belegungen für alle atomaren Formeln in allen Kombinationen durchprobieren!

2^8 Belegungen!

Eine Formelmenge heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung für alle Aussagensymbole gibt, so daß alle Formeln wahr sind.

```
ballerfuellen:-
Atoms = [Awahr, Ewahr, Fwahr, Gwahr, Aball, Eball, Fball, Gball],
Formel = [equi(Awahr, Eball),...],   %hier alle Formeln hinschreiben!
instantiate(Atoms),
solve(Formel),
write(Atoms),nl,fail.
```


Formelmenge X ist

erfüllbar, gdw.

es gibt eine Belegung, so daß alle Formeln von X wahr werden.

allgemeingültig, gdw.

unter allen Belegungen sind alle Formeln von X wahr.

aus einer Formelmenge Y folgerbar, d.h. Y|= X, gdw.

unter allen Belegungen, unter denen Y wahr ist,

ist auch jede Formel aus X wahr

Logische Folgerung ist

- transitiv: X |= Y, Y |= Z, so auch X |= Z
- reflexiv: X ⊇ Y, so X |= Y
- monoton: X ⊇ Y, Y |= Z, so auch X |= Z
- Damit A-->B wahr ist, braucht man <u>eine</u> entsprechende Belegung für A und B.
- Damit A |= B wahr ist, müssen <u>alle</u> Belegungen geprüft werden.

Wahrheitserhaltende Manipulationen

A<->B ⇒ (A->B) & (B->A)

A -> B ⇒ ¬A∨B
w w f w w w
f w w f w w
f f w f f w

¬(A&B)⇒ ¬A∨¬B
¬(A∨B) ⇒ ¬A&¬B
A∨(B&C) ⇒ (A∨B)&(A∨C)

Widerspruchsbeweis

Statt aus A logisch B zu folgern, kann man auch aus A und ¬B einen Widerspruch beweisen und deshalb die Annahme ¬B verwerfen.

A |= B ist identisch mit A--> B ist allgemeingültig

Wenn A&¬B --> f eigentlich dasselbe bedeutet wie A --> B, dann ist ein Widerspruchsbeweis ein ordentlicher Beweis.

Wahrheitserhaltende Manipulationen:

A	→	B	A	→	B	v	f	A	&	¬	B	→	f
w	w	w	w	w	w	w	f	w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	w	w	w	f	f	f	f	w	w	f
f	w	f	f	w	f	f	f	f	f	w	f	w	f