Prädikaten- und Hornlogik

- Syntax
- Semantik: Struktur, Modell
- Folgerung
- Ableitung

Formalisieren

Syntax Formalismus
Terme: Konstante, Variable, Funktionen
Formeln: w, f, Aussagensymbole, Atome, Quantoren und Atome, Junktoren und Atome
Signatur (Basis)
bestimmte Konstante, Variable, Funktionssymbole, Prädikatensymbole
mit bestimmten Sorten
Interpretation
Semantik Struktur (Interpretation, Weltausschnitt, *conceptualization*)
Objekte (universe of dicourse), in Sorten eingeteilt
Operationen
Prädikate
Modell
Formeln einer Signatur - wohlgeformt gemäß Formalismus
- gültig, erfüllbar, widersprüchlich gemäß Strukturen

---

wirkliches Problem (Welt)

Syntax

- PS: Prädikatensymbole/Stelligkeit
  p/n: $s_1, ..., s_n$
- FS: Funktionssymbole/Stelligkeit
  f/n: $s_1, ..., s_n$
- Terme: Variablen, Konstante einer Sorte, Funktionen sind Terme.
  Ist f/n: $s_1, ..., s_n$ --> s in FS, $T_1, ..., T_n$,T sind Terme, so ist f($T_1, ..., T_n$) ein Term der Sorte s.

Wohlgeformte Formeln

- Wahrheitswerte und Aussagensymbole
- Wenn p/n in PS und $T_1, ..., T_n$ Terme passender Sorte, dann sind
  p ($T_1, ..., T_n$) und ¬ p ($T_1, ..., T_n$) Literale.
- Ist V eine Variable und A ein Literal, so sind ∀V A und ∃V A Formeln (Literale).
- Sind A und B Formeln, so sind ¬A, A v B, A & B, A-->B, A <--> B Formeln.
- Das sind alle Formeln.

Normalformen

- Alle prädikatenlogischen Formeln können in eine Normalform durch wahrheitserhaltende Manipulationen überführt werden. Wenn in einer Form nicht alle Formeln dargestellt werden können, ist es keine Normalform.
- Konjunktive Normalform:
  $(A_{1,1} \vee \ldots \vee A_{1,n})$ & ... & $(A_{m,1} \vee \ldots \vee A_{m,j})$
  In einer Disjunktion darf kein Literal doppelt vorkommen, auch nicht mal positiv, mal negiert!
- Pränex-Normalform:
  erst die Quantoren, dann der Rest

Klauseln

- $(A_{1,1} \vee \ldots \vee A_{1,n})$ schreiben wir auch als Menge $\{A_{1,1}, \ldots, A_{1,n}\}$ und nennen das Klausel.
- In Klauseln darf ein Literal positiv und negiert vorkommen
- {} ist falsch (f).
- $\{p, \neg p\}$ ist allgemeingültig (w).

Hornklauseln

- Hornklauseln sind Klauseln mit nur einem positiven Atom.
- Hornklauseln sind keine Normalform:
  eltern(X,Y) --> vater(X,Y) v mutter(X,Y)
  eltern(X,Y), ¬mutter(X,Y) --> vater(X,Y)
  nicht darstellbar.
- Hornprogramm ist eine Konjunktion von Hornklauseln.
- Wo sind die Quantoren geblieben?

Quantoren

- Klauseln mit einem positiven Literal sind implizit all-quantifiziert
  { ∀ X,Y: ¬mutter(X,Y), elter(X,Y)}
  Wenn es nur den Allquantor gibt, kann er weggelassen werden.
- Anfragen sind implizit existenzquantifiziert.
  {∀ X: ¬mutter(X, uta), ¬frau(X)} ≡
  ∃ X: mutter(X,uta) & frau(X)
- Und wo bleiben Kombinationen?
  $\forall X_1, \ldots, X_n \exists Y\ p(X,Y)$ Skolemisierung!

Signatur

- Eine Menge von Sorten- und Objektsymbolen sowie Funktions-, Aussagen- und Prädikatssymbolen mit Argumenttypen aus diesen Sorten heißt Signatur.
- Beispiel Signatur $\mathcal{S}1$:
  Sorte: s
  Konstante: a, c der Sorte s
  Variable: X der Sorte s
  Operationssymbol: next: s --> s
  Prädikatensymbol: lt: s,s

Struktur

- Eine Struktur $\mathcal{M}$ wird durch Objekte verschiedener Sorten sowie durch Funktionen und Prädikate darauf gegeben.
- Die Objekte der Sorte s bilden den nichtleeren Bereich $\mathcal{M}_s$ der Sorte s.
- Eine Funktion auf $\mathcal{M}$ ist f/n: $\mathcal{M}_{s1}$ x ... x $\mathcal{M}_{sn}$ --> $\mathcal{M}_s$, wobei s_1, ..., s_n, s Sorten sind.
- Ein Prädikat auf $\mathcal{M}$ ist p/n: $\mathcal{M}_{s1}$ x ... x $\mathcal{M}_{sn}$ --> {w,f}, wobei s_1, ..., s_n Sorten sind.

Beispiele

- Struktur $\mathcal{M}$ 1:
  Objekte der Sorte natürliche Zahl, N
  Konstante: 0, 2
  Operation: next(N), wobei next(N) = N + 1
  Prädikat: lt(N, N'), wobei N < N‘
- Struktur $\mathcal{M}$ 2:
  Objekte der Sorte Wochentag, T: {Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag, Sonntag}
  Konstante: Sonntag, Dienstag
  Operation: next(T), wobei next(Sonntag)=Montag,
  next (Montag)= Dienstag,...
  Prädikat: lt(T, T'), wobei
  lt(Montag, Dienstag), lt(Montag, Mittwoch), ...
  lt(Dienstag, Mittwoch), lt(Dienstag,Donnerstag),...
  ...
  lt(Samstag, Sonntag), lt(Samstag, Montag),...

Interpretation

- Eine Interpretation ist eine Abbildung von einer Signatur auf eine Struktur.
- Beispiel I($\mathcal{S}1$) = $\mathcal{M}1$:

  s --> N
  a --> 0, c --> 2
  next(s) --> next (N)
  lt(s,s) --> lt (N, N')

Beispiel 2

- Beispiel I(𝒮2) = ℳ2:

  s --> T
  a --> Sonntag, c --> Dienstag
  next(s) --> next (T)
  lt(s,s) --> lt (T, T')

Modell

- Sei A eine Formel mit den Variablen $V_1, ..., V_n$ und ℳ eine Struktur passender Signatur. Die Formel A gilt in ℳ, wenn für alle Objekte $a_1, ..., a_n$ in ℳ passender Sorten die Formel A mit $\sigma = \{V_1 / a_1, ..., V_n / a_n\}$ in ℳ wahr ist.
- Eine Formelmenge X gilt in ℳ, wenn alle Formeln aus X in ℳ gelten.
- Gilt A bzw. X in ℳ, so heißt ℳ ein Modell von X bzw. A.

Beispiel

Signatur 𝒮1
Struktur ℳ1
Formel A:
Term t: next(next(c))
Atom p: lt (a, next(next(c)))
Formel: $\forall$ X | lt(X, next(X)) v ¬ lt(a, next(next(c)))
Auswertung:
wert(t) = 4
wert(p) = w
wert(A) = w
Substitutionen: {X/a, X/c,
X/next(a), X/next(next(a)),...
X/next(c), X/next(next(c)),... }
ℳ1 ist ein Modell für A.

Beispiel 2

Signatur 𝒮2
Struktur ℳ 2 (a --> Sonntag, c --> Dienstag)
Formel A:
Term t: next(next(c))
Atom p: lt (a, next(next(c)))
Formel: $\forall$ X | lt(X, next(X)) v ¬ lt(a, next(next(c)))
Auswertung:
wert(t) = Donnerstag
wert(p) = w
wert(A) = w
Substitutionen: {X/a, X/c,
X/next(a), X/next(next(a)),...
X/next(c), X/next(next(c)),... }
ℳ2 ist ein Modell für A.

noch mehr!

- Wir könnten uns noch mehr Interpretationen und Strukturen für dieselbe Signatur ausdenken.
- Wir könnten noch mehr Modelle für A finden.
- Oft gibt es unendlich viele Modelle für eine Formel (-menge).
- Modelle können unendlich sein (s. $\mathcal{M}$1 mit der Interpretation von next)!

(Un-)Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit

- Wenn ich ein Modell finde, ist die Formel erfüllbar.
- Wenn es keine Struktur gibt, in der die Formel nicht gilt, ist sie allgemeingültig.
- Wenn es kein Modell gibt, ist die Formel unerfüllbar = widersprüchlich.

Wie findet man Modelle?

Wir haben eine Signatur.
Wir betrachten nur Strukturen,
- in denen die Objekte genau die variablenfreien Terme aus den Formeln sind: Interpretation(t) = t;
- in denen diejenigen Operationen sind, mit denen wir die Terme aufbauen.

Wir nehmen an, daß es zu jeder Sorte einen Grundterm gibt oder erweitern die Signatur um eine Konstante der Sorte.
So basteln wir uns eine Struktur aus einer Signatur, die uns ja bekannt ist.

Leopold Löwenheim (1915),Thoralf Skolem (1929),
Jacques Herbrand (1930)

Herbrandstruktur

Herbranduniversum: Grundterme der Signatur der Sorte s für die Objekte
Funktionen: $f(t_1, ..., t_n)$ der Sorte s für f: $s_1, ..., s_n$ --> s, wobei t_1 der Sorte s_1 angehört, usw.

Termalgebra:
Prädikate sind Funktionen mit dem Wertebereich {w, f}.
... hat Signatur, die nur aus Grundtermen und termbildenden Funktionen besteht.
... ist eindeutig bestimmt!

Will man doch Prädikate haben, so sind alle Herbrandstrukturen für eine Signatur verschiedene Festlegungen auf dem Herbranduniversum für die Prädikate (Tupel).

Herbrandstruktur zu $\mathcal{S}1$ für A

- Herbranduniversum: a, c
  next(next(c))) --> next(next(c))
- wert(lt (a, next(next(c))))= {lt(a, c), lt(next(a), next(next(a)), lt(c, next(c))}
  beliebige Festlegung, alle nicht aufgeführten Tupel gelten nicht. Man nennt dies auch die Menge der Grundatome.
- wert(∀ X | lt(X, next(X)) v ¬ lt(a, next(next(c))))=w
  Diese Herbrandstruktur ist ein Modell für A.

Herbrandstrukturen und andere

- Eine andere Menge von Grundatomen ist eine andere Struktur.
- Eine Herbrandstruktur ist durch die Signatur und die Menge von Grundatomen eindeutig bestimmt.
- Eine Herbrandstruktur zu einer Menge X von Grundatomen ist eine Modell von X.
- Ist $\mathcal{M}$ Modell einer Formelmenge X, so gibt es eine entsprechende Herbrandstruktur, die ebenfalls ein Modell von X ist.

Herbrands Satz für endliche Formelmengen

- Eine Formelmenge ist widersprüchlich gdw. eine endliche Menge ihrer Grundbeispiele widersprüchlich ist.

- Man zählt also alle Teilmengen aller Grundbeispiele auf und prüft, ob sie widersprüchlich sind.
- Wenn die Menge der Grundbeispiele endlich ist, ist dies ein Entscheidungsverfahren für die Widersprüchlichkeit,
  sonst ein Semi-Entscheidungsverfahren.

Theorembeweiser

- Wenn eine Formelmenge widersprüchlich ist, findet das Semi-Entscheidungsverfahren dies heraus;
- wenn die Formelmenge nicht widersprüchlich ist, findet es dies vielleicht nicht.

- Semi-Entscheidungsverfahren heißen auch Theorembeweiser.

Formen

Pränex-Normalform
$Q_1\ X_{11}, ..., X_{1n}\ ...\ Q_m\ X_{m1}, ..., X_{mk}\ A$

Wenn es nur Allquantoren gibt, können wir sie weglassen.
$\forall X\ p(X) = p(X)$

Wie aber bekommen wir die Existenzquantoren weg?

Skolemisierung!

Formen

$\neg \exists X\ A$ ist identisch mit $\forall X \neg A$
$\exists X\ p(X)$ ist erfüllbarkeitsgleich mit $p(d)$. Wir fügen d der Signatur hinzu und nehmen als Interpretation von d ein Objekt, für das p zutrifft.

Signatur: Konstante: a, b, c
Signatur': Konstante:a, b, c, d
Interpretation a --> o_1, d --> o_1
Struktur: Objekte: o_1, o_2, o_3
Prädikat p: (o_1)

Skolemisierung

$\forall X\ \exists Y\ X > Y$
Hier können wir nicht alle Interpretationen für eine neue Konstante d durchprobieren, denn die Belegung von Y ist abhängig von der von X.
$\forall X\ X > g(X)$

Für jeden Existenzquantor in der Formel wird angewandt:
- wir wählen eine neue Funktion g, deren Stelligkeit gleich der Anzahl von $\forall$-Variablen links von Y ist.
- streichen $\exists$ Y aus dem Präfix und
- ersetzen alle Vorkommen von Y in der Formel durch die Funktion g(X).

Die Ursprungsformel ist widersprüchlich (unerfüllbar) gdw. die skolemisierte Formel unerfüllbar ist.
Skolemisierung kann also bei Widerspruchsbeweisen angewandt werden.

Beispiel

$\forall X\ \exists Y\ >(X, Y)$ wird zu $\forall X\ >(X, g(X))$

Signatur: Variable: X, Y der Sorte s ...
Signatur': Variable: X der Sorte s
Operationssymbol: g: s --> s
Prädikatsymbol >: s,s
Interpretation g(X) --> 2.Stelle in >-Tupeln, (X, _)
Struktur: Objekte: natürliche Zahlen
Prädikat >: (1,0), (2, 0), (3, 0), ...
(2, 1), (3, 1), ...
...

Wenn $\exists Y\ >(X, Y)$ in der Struktur nicht gilt, finden wir einmal für ein bestimmtes X kein Tupel, können also g(X) nicht belegen.
Auf diese Weise brauchen wir g nicht 'wirklich' zu definieren (z.B. als X+n).

Es geht auch ohne

...Skolemisierung, wenn es nur eine Variable X gibt:
$T \models \exists X\ A$
Beweis durch Widersprüchlichkeit von T mit $\neg \exists X\ A$
$T, \neg \exists X\ A \models f$ ist identisch mit $T, \forall X \neg A \models f$
Bei dem Beweis wird X in A durch einen Term substituiert. Da es nur eine Variable gibt, ist $A\sigma$ ein Grundbeispiel.
Wenn T widerspruchsfrei ist, liefert der Widerspruchsbeweis auf die Frage:
" gibt es ein X mit A?" die Antwort:
"ja, z.B. $A\sigma$"
Da A im Beweis mehrfach verwendet wird, entspricht $\exists$ einer Disjunktion von Grundbeispielen A [X/t1] v ... v A [X/tn].
$T \models \exists X\ A$ gdw. $\exists\ A\sigma_1, ..., A\sigma_n$, so daß $T \models A\sigma_1 \vee ... \vee A\sigma_n$

Herbranduniversum

Das Herbranduniversum für eine skolemisierte Formel A:

- Alle in A vorkommenden Konstanten sind darin. Falls A keine Konstanten enthält, so ist a darin.
- Für jedes in A vorkommende Funktionssymbol f/n und Terme $t_1, ..., t_n$ passender Sorten ist $f(t_1, ..., t_n)$ darin.

$A = \forall X\ \forall Y\ \exists Z\ \ p(X, f(Y), Z)$ ergibt skolemisiert:

$A' = \forall X\ \forall Y\ \ p(X, f(Y), g(X,Y))$

Herbranduniversum:

{a, f(a), g(a,a), f(f(a)), f(g(a,a)), g(a, f(a)), g(f(a), a), g(f(a), f(a)), f(f(f(a))), ...}

Folgern

Aus der Formelmenge X folgt logisch (semantisch) die Formel A, geschrieben $X \models A$, gdw.
für jede Struktur $\mathcal{M}$ gilt:
wenn $\mathcal{M}$ Modell von X ist, so ist $\mathcal{M}$ ein Modell von A.

Die Menge aller Folgerungen aus X, geschrieben Cons(X) ist definiert:
$\{A \mid A$ ist eine wohlgeformte Formel und $X \models A\}$

Kalkül

- Syntax (was sind wohlgeformte Formeln), Inferenzregeln (und Axiome)
- Die Inferenzregeln rekonstruieren syntaktisch die Folgerung.
- Die syntaktische Rekonstruktion der Folgerung heißt Ableitung, geschrieben $\vdash$.
- Ein Ableitungsoperator ist <u>korrekt</u>:
  wenn $X \vdash A$ dann $X \models A$
- <u>vollständig</u>:
  wenn $X \models A$ dann $X \vdash A$

Inferenzregeln

$\mathcal{R}$:

- positive Schnittregel:
  w --> P , P & C --> D |- C--> D
- negative Schnittregel:
  A --> P, P & C --> f |- A & C --> f

$\mathcal{R}$ ist korrekt, aber nicht vollständig, weil Tautologien nicht abgeleitet werden, d.h. aus der leeren Menge wird nichts abgeleitet.

Für das Widerlegen ist $\mathcal{R}$ korrekt und vollständig.

Resolution

- Schnittregel und Unifikation ergeben Resolution:
  $K1, K2 \vdash (K1 - \{L\})\sigma \cup (K2 - \{\neg L'\})\sigma$
- Seien K1 und K2 Klauseln. R heißt Resolvent von K1 und K2, falls es ein Literal L gibt mit L in K1 und ¬L´ in K2 und σ unifiziert L und L´.
  $R = (K1 - \{L\})\sigma \cup (K2 - \{\neg L'\})\sigma$
- Wenn R die leere Menge ist, ist K2 bewiesen.

Beispiel

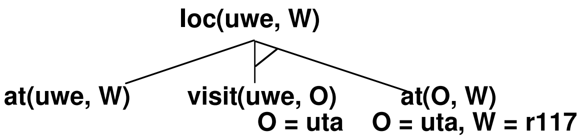
Programm:
loc(P, Place):- at(P, Place).
loc(P, Place):-
visit(P, Other),
at (Other, Place).
at(uta, r117).
visit(uwe, uta).
Anfrage:
:- loc(uwe, W)

¬ loc(uwe,W) ¬ at(P, Place),loc(P, Place)
¬at(uwe, W)

¬loc(uwe, W) ¬ visit(P,O), ¬ at(O, Place), loc(P, Place)
¬visit(uwe,O), ¬at(O, W)

¬visit(uwe,O) visit(uwe, uta)
[ ] O = uta

¬ at(O, W) at(uta, r117)
[ ] W = r117



Verwendung von Logik

- Beschreibung eines Repräsentationsformalimus´ -- wohlfundierte Semantik
- Repräsentationsformalismus --
  Problemlösen als Beweis, Grammatikrepräsentation, Repräsentation der Semantik natürlicher Sprache, ...
- Programmiersprache --
  logische Programmierung
- Realisierung von Operationen auf dem Rechner